

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ к №1 за 2012 год

■ ПРИКЛЮЧЕНИЯ СО СТРЕЛКАМИ

Минутная стрелка делает за сутки 24 оборота, а часовая – два (последние обороты завершаются как раз к началу новых суток). Стрелка, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелками, движется со средней скоростью, и значит, сделает среднее число оборотов, то есть $(24+2)/2=13$.

Можно было рассуждать и по-другому. Если считать часовую стрелку неподвижной, минутная обернётся вокруг неё $24-2=22$ раза. Тогда стрелка, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелками, сделает половинное число оборотов вокруг часовой, то есть 11. Прибавляя два оборота часовой стрелки, получаем итоговый ответ: 13 оборотов.

■ ВЁДРА

Скошенные вёдра можно вставлять друг в друга, при этом стопка занимает мало места и удобна для транспортировки и хранения. По аналогичному принципу делают одноразовые стаканчики для напитков, корзины и тележки в супермаркетах, офисные стулья.

■ УДИВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Объясним решение на примере для $n = 5$. Рассмотрим квадрат 5×5 . Он состоит из 25 клеток, потому что в нём 5 рядов по 5 клеток. Но можно посчитать число клеток другим способом – по диагоналям (рис. 1). В первой диагонали 1 клетка, во второй – 2, в третьей – 3, в четвёртой – 4, в пятой – 5, в шестой – снова 4, в седьмой – 3, и так далее, в последней – 1 клетка. Значит, число клеток в квадрате равно $1+2+3+4+5+4+3+2+1$, и эта сумма равна 25. Если мы нарисуем квадрат $n \times n$ и сосчитаем число клеток в нём по диагоналям, то докажем утверждение задачи.

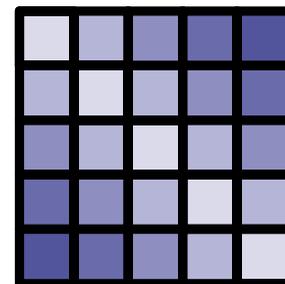


Рис. 1

■ ЛИСТ МЁБИУСА

1. Если разрезать лист Мёбиуса вдоль, отступив треть от края, получатся два сцепленных кольца. Одно такое же, как исходное, только в три раза тоньше. Второе тоже в три раза тоньше, но ещё и длиннее в два раза и закрученное на 360° (полный оборот).

2. Если у нарисованной на рисунке 2 модели продолжить разрез вдоль всего листа, получится кольцо, закрученное на 720° .

3. Если закрутить полоску на 360° и разрезать её по центральной линии, получатся два сцепленных кольца половинной ширины, каждое из которых также закручено на 360° .

4. При разрезании двух склеенных листов Мёбиуса могут получиться два разных результата – либо два сцепленных «сердечка» (рис. 3), либо два отдельных (рис 4). Это зависит от того, как были закручены листы Мёбиуса – в одну и ту же сторону или в разные.

А вы заметили, что на рисунках 9 (значок мехмата) и 11 (памятник) из статьи изображены не совсем листы Мёбиуса: перекручивание сделано на три полуоборота!



Рис. 2



Рис. 3



Рис. 4

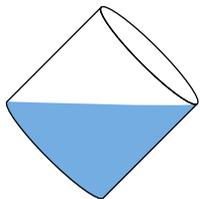


Рис. 5



Рис. 6

СТЕРЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ВСЕХ

1. Наберём сначала полную кастрюлю, а потом отольём лишнее: будем наклонять кастрюлю до тех пор, пока не покажется дно (рис. 5).

2. На одну стирку – ведь из восьми таких кусков как раз можно составить исходный кусок!

3. Пример изображён на рисунке 6.

4. Из условия ясно, что аквариум имеет вид параллелепипеда размерами $1 \times 1 \times 2$ (рис. 7). Будем считать, что рыбка плыла сверху вниз.

а) Посмотрите на рисунок из условия задачи. Из его левой части видно, что рыбка начала свой путь где-то на ребре AB параллелепипеда, а из его правой части тогда понятно, что сначала рыбка просто проплыла от A до B по ребру AB . Далее видим, что рыбка поплыла по прямой в точку N , затем проплыла отрезок NM , после поплыла напрямую в точку X и, наконец, проплыла ребро XT . Итоговый путь рыбки изображён на рисунке 8. Теперь нетрудно нарисовать и вид пути сверху (рис. 9).

б) Посмотрите на рисунок из условия задачи. Видно, что рыбка выплыла из точки B параллелепипеда и проплыла отрезок BL . Далее поплыла в точку N , но не обязательно по прямой – она могла плыть совершенно произвольно, лишь оставаясь всё время в плоскости $KLMN$. Из точки N рыбка поплыла напрямую в точку X , а затем проплыла ребро XT . Один из возможных путей рыбки изображён на рисунке 10. Нетрудно нарисовать и вид этого пути сверху (рис. 11).

5. Нет, поскольку горлышки у них одинакового размера!

6. У второго и третьего. А вот первый кубик получить из такой развертки нельзя – у склеенного из развертки кубика грани с белым и коричневым кружками будут противоположными, а не соседними.

7. Тяжелее шар радиуса 8 см.

8. Положим кирпичи так, как показано на рисунке 12: два кирпича один на другой, и третий кирпич впритык к нижнему из первых двух. Над третьим кирпичом образуется пустое место, имеющее форму кирпича. Отмеченные на рисунке точки – противоположные вершины этого воображаемого кирпича, и ничто не мешает приложить к ним линейку и измерить расстояние между ними. Это и будет длина диагонали кирпича.

9. а) Возьмём три одинаковых шара, положим их на стол и сдвинем так, чтобы любые два касались друг друга (точки их касания со столом образуют при этом равносторонний треугольник со стороной, равной удвоенному радиусу шара). Затем положим еще один такой же шар сверху на эти три шара так, чтобы он коснулся остальных.

б) Возьмём пирамидку из четырёх шаров, построенную в предыдущем пункте. Поместим в центр этой пирамидки маленький шарик и будем раздувать его, пока он не коснётся всех четырёх шаров пирамидки. Такой момент обязательно наступит, и касание будет сразу со всеми шарами пирамидки из-за её симметричности.

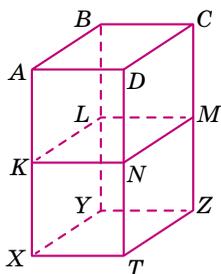


Рис. 7

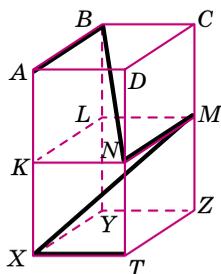


Рис. 8



Рис. 9

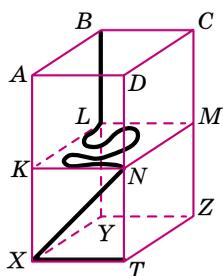


Рис. 10



Рис. 11

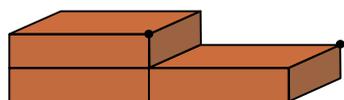


Рис. 12



Рис. 13



Рис. 14

10. Положим на стол одну цепочку из четырёх шариков (рис. 13), сверху на неё положим прямоугольник из шести шариков так, как показано на рисунке 14, сверху положим второй прямоугольник, развернув его перпендикулярно первому (рис. 15), и, наконец, сверху положим вторую цепочку из четырёх шариков, также развернув перпендикулярно первой цепочке (рис. 16). Пирамида готова! Очень рекомендуем сделать такие цепочки и прямоугольники из шариков своими руками и проверить решение.

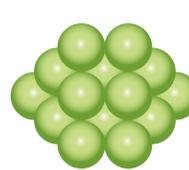


Рис. 15

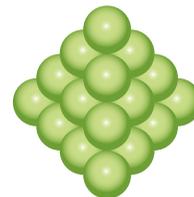


Рис. 16

■ ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

Соседка не понесла никакого убытка. Мальчик ни за что (фальшивая банкнота не в счёт) получил десятирублёвую шапку и 15 рублей. Значит, именно столько (25 рублей) и потерял продавец.

■ КАТЕТ РАВЕН ГИПОТЕНУЗЕ

В этой задаче самое главное – нарисовать аккуратный рисунок. Тогда сразу будут видны ошибки в рассуждениях.

Во-первых, точка O пересечения биссектрисы угла A с серединным перпендикуляром к BC лежит не внутри треугольника ABC , а вне его! (Знатоки геометрии могут доказать, что O – середина дуги BC описанной окружности.)

Во-вторых, раз точка O оказалась вне треугольника ABC , то и перпендикуляры на стороны треугольника могут падать не на сами стороны, а на их продолжения. Как видно из аккуратного рисунка, один перпендикуляр попадает на продолжение катета AC , а второй – на гипотенузу AB .

Все рассуждения про равенства треугольников остаются в силе. По-прежнему $AE = AF$ и $CE = BF$. Но теперь $AB = AF + BF$, а $AC = AE - CE$. Противоречие ликвидировано!

Докажите сами, что оба перпендикуляра из точки O не могут попасть на продолжения сторон (то есть они расположены именно так, как показано на рисунке).

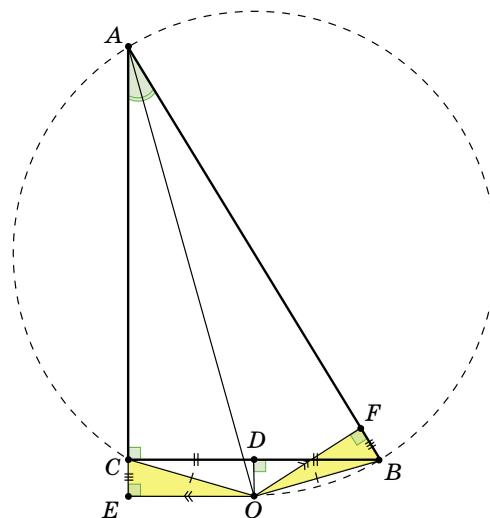


Рис. 17

■ ГДЕ РУЛЬ?

В машине на рисунке симметрично всё, кроме... зеркал! Одно из них наклонено под большим углом к кузову, чем другое.

Лучи света, отражаясь от предметов, попадают нам в глаза, благодаря чему мы и видим эти предметы. Водитель должен видеть в зеркале дорогу за собой. То есть лучи, идущие из-за машины (слева и справа), должны отразиться в зеркалах и попасть водителю в глаза. Точка пересечения лучей, отраженных от первого зеркала и от второго, покажет нам примерное расположение головы водителя.

Чтобы понять, как лучи отражаются от зеркал, воспользуемся известным фактом: угол падения луча на зеркало равен углу отражения. На рисунке 18 это означает, что закрашенные одинаковым цветом углы равны. По расположению точки пересечения лучей видно, что водитель сидит слева.



Попробуйте понять, что увидел бы водитель в таких зеркалах, если бы сидел справа.

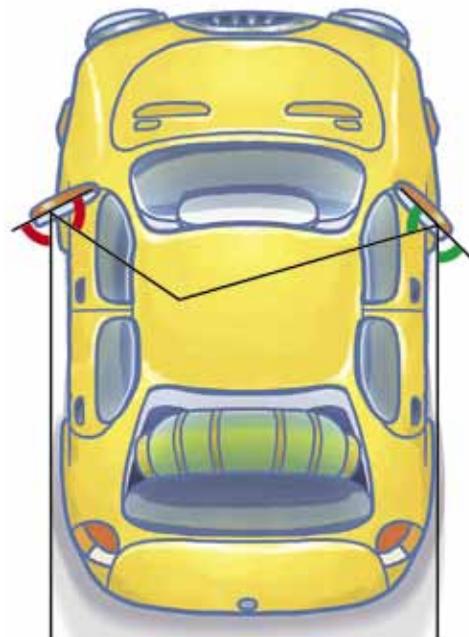


Рис. 18