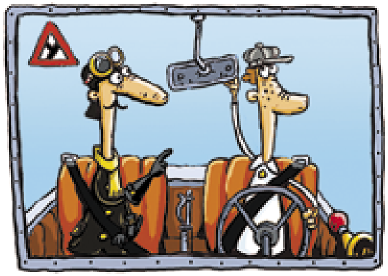
С. Шашков

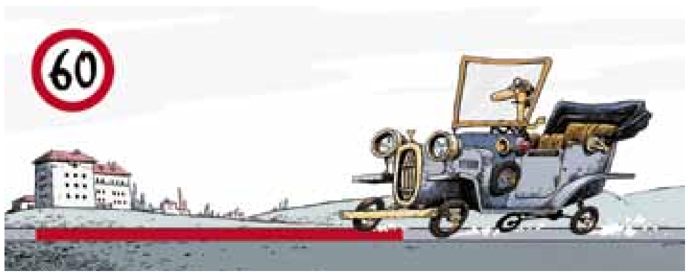
Автомобильные пробки – серьёзная проблема больших городов. С ней пытаются бороться, придумано множество эффективных и не очень методов борьбы с пробками. Кажется, что самый простой и естественный способ – строительство новых первоклассных дорог. Однако оказывается, существуют такие дорожные сети, в которых строительство новой дороги при подходящей интенсивности движения приведет к тому, что время движения абсолютно всех участников дорожного движения увеличится!



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

У каждого участка дороги есть некоторая пропускная способность – сколько машин в час может проехать через этот участок, не снижая скорости. Пока машин мало, они могут ехать с максимальной скоростью. Когда машин становится слишком много, дистанция между машинами сокращается, поэтому водителям приходится ехать осторожнее и снижать скорость. Безопасная дистанция – это расстояние, которое проезжает тормозящая машина до полной остановки. Физика позволяет его рассчитать – оказывается, оно пропорционально квадрату скорости, с которой машина начала тормозить. Например, тормозной путь легкового автомобиля, ехавшего со скоростью 60 км/ч по сухому асфальту – около 20 м, со скоростью 80 км/ч – около 36 м, а со скоростью 120 км/ч – целых 80 м!

Пропускную способность реальной дороги можно грубо оценить по количеству полос и скорости, с которой можно по данной дороге ехать (в данную погоду). Например, если полоса всего одна, а скорость движения – 80 км/ч, то за час проедет 80000 м «автомобильного потока». При такой скорости интервалы между машинами, включая длину одной машины, можно оценить в 32 м, и тогда это дает пропускную способность около 80000/32 = 2500 машин в час.



А что будет, если по участку этой дороги соберутся проехать за час 10000 машин – в 4 раза больше? Оказывается водителям придётся в 4 раза сбросить скорость. Тогда дистанция между машинами уменьшится в 16 раз, и за час через участок проедет в 4 раза меньше метров «автомобильного потока», который в 16 раз «гуще» – то есть как раз в 4 раза больше машин. В реальности это приведёт к коллапсу – по одной машине на каждые 2 метра дороги! А в нашей упрощённой модели это будет просто означать, что водитель потратит в 4 раза больше времени, чем при движении по незагруженной дороге.

Будем считать, что перед выездом каждый водитель узнает по интернету маршрут, который займет у него наименьшее время с учетом пробок на данный момент, а далее следует этому маршруту.

В реальности у каждого водителя своя цель, однако чтобы понять ключевую идею (и увидеть причину некоторых реальных пробок), достаточно считать, что все водители едут из пункта *A* в пункт *B*.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Придумайте такую дорожную сеть между пунктами *A* и *B*, что после строительства новой дороги при подходящей интенсивности движения время движения абсолютно всех участников дорожного движения увеличится.

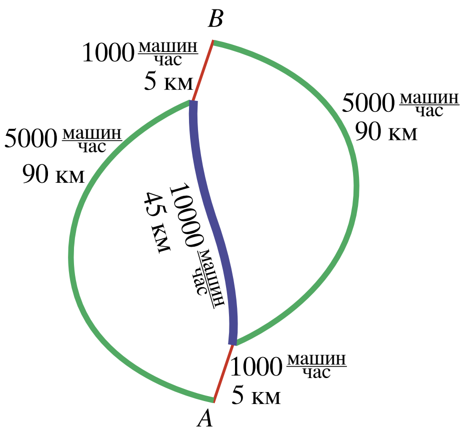
Укажите длины дорог, их пропускные способности, максимальную скорость на каждой, число полос, число водителей, едущих из *A* в *B*.

Подсказка 1 (как придумать дорожную сеть).

Если в сети есть хотя бы два места с постоянными пробками, то, построив новую дорогу, можно «заставить» многих постоять в обоих.

Подсказка 2 (как посчитать время).

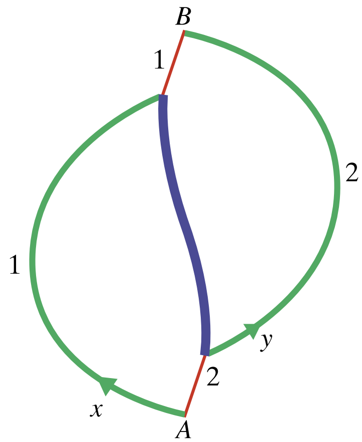
Для любой дорожной сети, в которой все участники едут из A в B, время движения по всем используемым маршрутам в некоторый момент станет одинаково.



РЕШЕНИЕ

Для начала заметим, что для любой дорожной сети, в которой все участники едут из A в B, время движения по всем используемым маршрутам когда-нибудь установится и будет одинаково. Действительно, если какой-то маршрут окажется быстрее, то водители будут выбирать именно его, до тех пор пока либо медленные маршруты вообще не перестанут использоваться, либо времена не выравняются и уже не будут меняться*.

Теперь рассмотрим такую дорожную схему, как на рисунке слева. По всем зелёным и синей дорогам можно двигаться со скоростью 90 км/ч, по красным – всего 30 км/ч, очень уж плохая дорога. Длины красных участков – 5 км, длины зелёных – 90 км, а синим отмечена новая четырехполосная дорога длиной 45 км. Пусть в течение каждого часа из A в B хотят проехать 4000 машин. Тогда они поровну разделятся по левому и правому маршруту и будут тратить 60 минут на зеленый участок ($2000 < 5000$) и 20 минут на красный (желающих проехать вдвое больше пропускной способности, поэтому скорость упадет в два раза), то есть 80 минут в сумме (у дорог указаны их пропускные способности и длины).

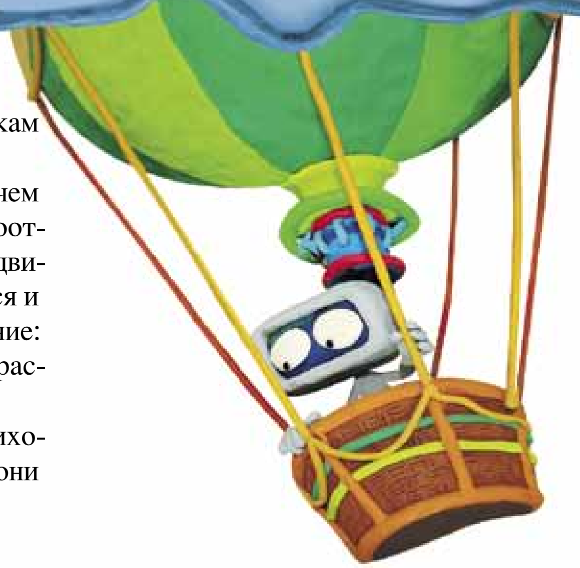


Посмотрим, что же произойдет после строительства новой (синей) дороги. После открытия дороги водители обнаружат новый путь, время движения по которому будет равно $20 + 30 + 20 = 70$ минут. Это быстрее, чем 80 минут по старым путям, поэтому многие поедут по новому пути. Но всякий, кто так поедет, будет два раза стоять в пробке, увеличивая тем самым время ее прохождения. Значит, время движения по «старому» пути должно увеличиться! Следовательно, еще больше машин поедет по новому пути. Так будет происходить, пока время движения по всем путям не уравняется. Вычислим это время.

Раньше по зеленой дороге из A начинали движение 2000 машин в час. Пусть после строительства синей дороги по зелёной из A будут ехать x машин в час. По красной дороге тогда поедут $4000 - x$ машин в час. Пусть на развилке синей и зелёной дорог зелёную выбирают y машин в час, а по синей поедут оставшиеся $4000 - x - y$. Поскольку и x, и y в нашем примере меньше 5000 (про-

*Такая ситуация называется *равновесием Нэша*: система приходит в такое состояние, в котором всем заинтересованным лицам невыгодно его менять – в данном случае водители потеряют из-за этого лишнее время.

пускной способности зеленых дорог), время по зелёным отрезкам пути будет по-прежнему равно 60 минутам.



Если $x > y$, то первая красная дорога загружена больше, чем вторая: ведь поток на красной дороге – это сумма потока на соответственной зелёной дороге и потока на общей синей. А значит, движение по первому пути медленнее. Такие же рассуждения годятся и в обратном случае, поэтому в равновесии $x = y$. Обратите внимание: симметричность схемы дорог влечет за собой и симметрию в распределении потоков!

Значит, по синей дороге едут $4000 - 2x$ машин, которым приходится дважды стоять в пробках на красных участках. И тратят они на весь путь

$$30 + 2 \cdot \frac{5}{0{,}5} \cdot \frac{4000 - x}{1000} \text{ минут.}$$

Это время тоже равно времени остальных участников движения на весь путь, поэтому получаем уравнение

$$60 + \frac{5}{0{,}5} \cdot \frac{4000 - x}{1000} = 30 + 2 \cdot \frac{5}{0{,}5} \cdot \frac{4000 - x}{1000}$$

Решив его, найдем, что $x = 1000$ машин, а время движения – 90 минут. Поразительно, строительство новой хорошей дороги привело к увеличению времени движения всех участников с 80 до 90 минут!

Можно придумать и куда более сложные примеры с множеством целей и путей. Но проблема всегда одна и та же – «бутылочные горлышки» (узкие места) в дорожной сети. В следующий раз, стоя в пробке, обратите внимание – вдруг именно хорошая новая широкая дорога ведет сюда?

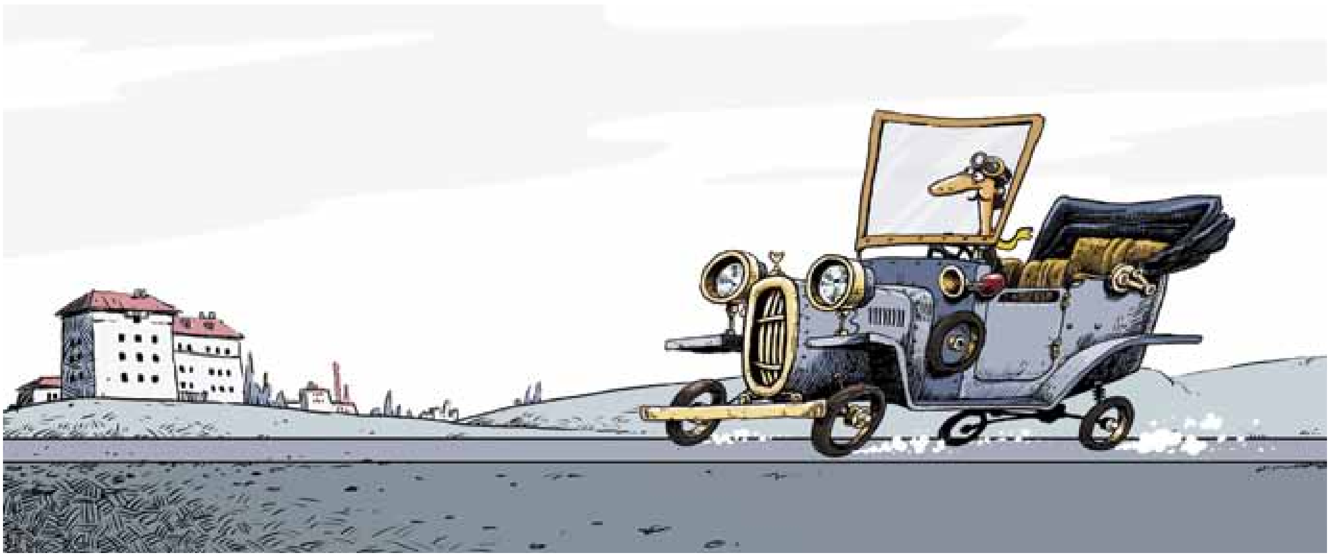
ПОСЛЕСЛОВИЕ

Наша модель была сильно упрощенной по сравнению с теми, которые используются учеными и проектировщиками при планировании дорожных сетей. Пропускная способность реальной дороги зависит от множества факторов: от погоды (в дождь и снег скорость падает), от потока грузовиков, от количества ям. Более того, пропускная способность реальной дороги при увеличении потока начиная с некоторого момента начнёт падать: невежливые водители всё время будут пытаться объехать по обочине, проскочить в любые щели, а это создаёт беспорядок в движении, который снижает скорость. Но и рассмотренная нами модель хорошо отражает основные закономерности распределения транспортных потоков. Её использовал немецкий математик Дитрих Браесс, а сама ситуация, когда строительство новой дороги лишь ухудшает дело, называется парадоксом Браесса.

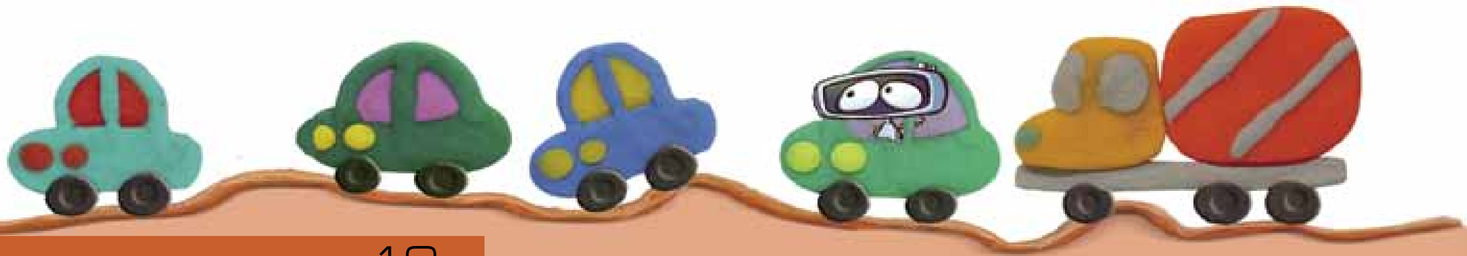
ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Забавно, что парадокс Браесса несколько раз случался и в реальной жизни. Например, в Штутгарте в 1969 году после увеличения дорожной сети ситуация с пробками улучшилась только после того, как некоторые новые дороги были закрыты.

Важное и в то же время очень правдоподобное допущение, сделанное нами в самом начале – что водители выбирают свой маршрут, руководствуясь только личной выгодой, чтобы минимизировать время на свою дорогу. Это как раз и приводит к проблемам. Если бы они все имели возможность перед выездом договориться, как ехать, то новой дорогой можно было бы совсем не пользоваться, вернув время движения к 80 минутам. Но в нашей модели (и в жизни!) водители эгоистичные, и, несмотря на то, что каждый стремится выбрать для себя быстрейший маршрут и действует при этом абсолютно логично, получается парадоксальный итог: все дружно оказываются в проигрыше. Все это понимают, но менять что-то невыгодно – система находится в равновесии Нэша.



Отметим, что если бы можно было как-то влиять на предпочтения водителей в выборе дорог, то синяя дорога из рассмотренного нами примера вполне могла бы принести пользу. Например, если сделать её платной, то далеко не все решат по ней поехать. Меняя цену проезда, можно управлять долей водителей, которые выберут новую дорогу, и добиться снижения общего времени пути из A в B.



Художник Yustas-07