Александр Блинков

Геометрические построения с помощью ТРЕУГОЛЬНИКА-ШАБЛОНА

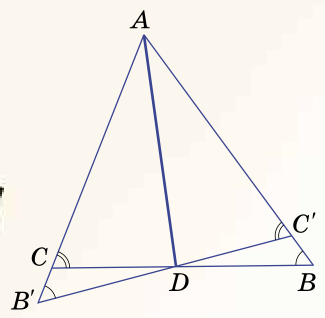

Рис. 1

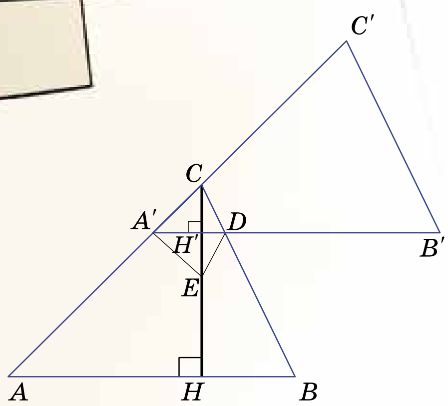

Рис. 2

В прошлом номере мы построили замечательные линии треугольника с углами 30°, 60°, 90° почти из ничего – можно было пользоваться только карандашом и шаблоном этого треугольника. Попробуем справиться с задачей посложнее и построить биссектрису, высоту, медиану и серединный перпендикуляр к стороне для *произвольного* треугольника, используя этот треугольник как шаблон.*

Проще всего дело обстоит с биссектрисой. Как и в предыдущем случае, несложно доказать, что в любом треугольнике биссектриса меньше хотя бы одной из двух сторон, между которыми она проведена (тут пригодится неравенство треугольника). Значит, в любом неравностороннем треугольнике можно построить любую из биссектрис уже известным нам способом (см. рис. 1).

Подумайте, почему этот способ не годится для равностороннего треугольника? А как в равнобедренном треугольнике построить биссектрису угла при вершине?

С высотой и медианой всё сложнее. Возьмём, например, в качестве шаблона какой-нибудь треугольник, «близкий» к равностороннему. Тогда построения, которые мы использовали для прямоугольного треугольника, сделать не получится – ведь длины никакой из сторон шаблона не хватит, чтобы использовать её в качестве линейки.

Надо как-то уменьшить размеры отрезков, которые придётся проводить. Неожиданно на помощь приходит ещё один вид движений на плоскости – параллельный перенос! Пусть дан произвольный треугольник-шаблон ABC, и требуется построить высоту CH и медиану CM. Изобразив треугольник ABC, перенесём его параллельно вдоль луча AC (см. рис. 2, 3). Вершину A сдвинем в точку A' так, чтобы длина отрезка CA' была намного меньше длины CA. При таком параллельном переносе треугольник ABC перейдёт в равный ему треугольник $A'B'C'$, причём стороны $A'B'$ и AB будут параллельны. Тогда в треугольнике $A'DC$, где D – точка пересечения $A'B'$ и BC, будут такие же углы, как и в исходном. Пользуясь шаблоном, можно отложить углы, равные углам A' и D треугольника $A'DC$ и построить треугольники $A'ED$ (рис. 2) и DFA' (рис. 3) – получились картинки, аналогичные тем, которые были для прямоугольного шаблона, но с уменьшенными размерами!

* Серия задач придумана А. Блинковым и Ю. Блинковым. Задачи использовались на XV турнире имени А.П. Савина и VIII устной математической олимпиаде в г. Москве (7 класс)

Треугольники $A'ED$ и $A'CD$ симметричны относительно стороны $A'D$, а треугольники DFA' и $A'CD$ симметричны относительно середины $A'D$. Тогда, проведя в первом случае отрезок CE, а во втором – отрезок CF, мы сможем продлить их до пересечения со стороной AB треугольника ABC и получим, соответственно, его высоту CH и медиану CM. Остаётся объяснить, почему это так.

В первом случае это совсем просто – так как $A'D$ и AB параллельны, то прямая CH, перпендикулярная $A'D$, будет перпендикулярна и AB.

Во втором случае заметим сначала, что треугольник ABC – это как бы равномерно растянутая копия треугольника $A'DC$, когда длины всех сторон увеличены в одно и то же число раз, а углы одного треугольника соответственно равны углам другого. В таких случаях говорят, что треугольник ABC *подобен* треугольнику $A'DC$. Кроме того, на этом чертеже есть ещё две пары подобных треугольников: $A'M'C$ и AMC; $DM'C$ и BMC. Значит, AM во столько же раз больше $A'M'$, во сколько раз CM больше CM' – но и во столько же раз и BM больше DM'. Так как $A'M' = M'D$, то $AM = MB$, то есть M – середина AB. *Более строго это можно доказать, познакомившись со свойствами частного случая подобия – гомотетией.*

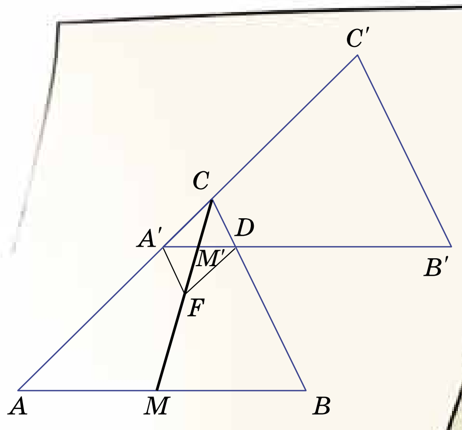

Рис. 3

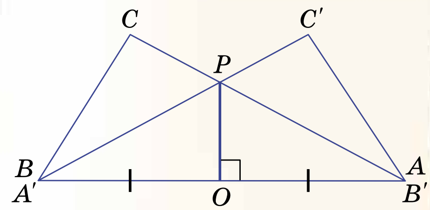

Рис. 4

Понятно, что, научившись строить середину любой стороны треугольника, мы сможем построить и серединный перпендикуляр к любой стороне, воспроизведя построение рисунка 4, а также любую среднюю линию треугольника. Не составит труда построить и четыре замечательные точки треугольника: центры вписанной и описанной окружности, точку пересечения высот (*ортоцентр*) и точку пересечения медиан (*центроид*). Попробуйте!

Заметим, что указанный способ построения высоты и медианы – не единственный. Подумайте самостоятельно над другими способами этих построений, а также над тем, какие ещё замечательные линии и точки можно построить, используя произвольный треугольник-шаблон. *В частности, можно найти способы построить прямую Эйлера, точки касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами треугольника, точки Жергонна и Нагеля, касательную к описанной около треугольника окружности в любой его вершине, симедианы треугольника и точку Лемуана и так далее.***

Надеемся, что построения с помощью треугольника-шаблона помогут вам глубже понять свойства основных преобразований плоскости, изучаемых в школьном курсе геометрии.

** Подобное исследование было успешно проведено С. Довжиком, на тот момент учеником 9 класса ЦО № 218, г. Москва

Художник Виктор Пяткин