КОНКУРС, II ТУР (см. «Квантик» № 2)

6. Достаточно, чтобы среди общего количества учеников обеих школ возросла доля учеников школы №2 (попробуйте это доказать).

Скажем, если в 2010 году в школе №1 учились 50 девочек и 50 мальчиков, а в школе №2 – 20 девочек и 80 мальчиков, то общая доля мальчиков в двух школах равна $(50+80)/200=0{,}65$, то есть 65%. А если в 2011 году в школе №1 учатся те же дети, а в школе №2 учатся, например, уже 40 девочек и 160 мальчиков, то общая доля мальчиков в двух школах увеличится до $(50+160)/300=0{,}7$, то есть до 70%.

7. Хватит, так как длины дорожек одинаковы! Длина дорожки, покрывающей лестницу, складывается из длин горизонтальных участков этой лестницы и длин её вертикальных участков. Но у каждой лестницы сумма длин горизонтальных участков равна длине основания лестницы (2 метра), а сумма длин вертикальных участков равна высоте лестницы (1 метр). Значит, длина каждой из дорожек одна и та же: 3 метра, а количество ступенек у лестниц не имеет значения.

8. Заметим сразу, что $К \neq 0$, так как число КВ начинается на К, а число не может начинаться с нуля. Но тогда и $В \neq 0$, так как при возведении в степень круглого числа получается тоже круглое число, а число НТИК оканчивается на К, и $К \neq 0$.

Так как двузначное число КВ, возведенное в степень А, равно четырехзначному числу НТИК, то А не меньше 2 (очевидно) и не больше 3 (ведь даже самое маленькое двузначное число 10, возведённое в 4-ю степень, даст уже пятизначное число 10000).

Значит, А – это либо 2, либо 3. Проверим оба эти варианта.

1. Если $А=3$, то $К=1$ или $К=2$ ($К<3$, так как 30^3 уже пятизначное число).

Пусть $К=1$. Тогда $В \neq 1$, но легко проверить, что никакая другая цифра, возведённая в третью степень, не даст число, оканчивающееся на 1. Значит, этот случай невозможен.

Пусть $К=2$. Тогда $В=1$ (так как $В \neq 0$, а 22^3 даёт в результате уже пятизначное число). Но при возведении в любую степень число, оканчивающееся на 1, даёт в результате число, оканчивающееся на 1, а $К \neq 1$. Противоречие.

2. Пусть $А=2$. Тогда:

$К \neq 1$, так как даже 19^3 – всего лишь трёхзначное число (361), и $К \neq 2$, так как $А = 2$.

Далее, $К \neq 3$, $К \neq 7$ и $К \neq 8$, так как ни одна цифра при возведении в квадрат не даст числа, оканчивающегося на 3, 7 или 8. Также $К \neq 5$, так как тогда и $В=5$ (чтобы $В^2$ оканчивалось на 5), а В и К – разные цифры.

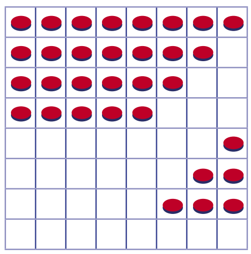
Проверим вариант $К=4$. В этом случае В – либо 2, либо 8 (иначе $В^2$ не будет оканчиваться на 4). Но $В \neq 2$, так как $А=2$, и, значит, $В=8$. Но $48^2=2304$, то есть $Н=2$, а это невозможно, так как $А=2$. Следовательно, $К \neq 4$.

Проверим вариант $К=6$. В этом случае В – либо 4, либо 6 (иначе $В^2$ не будет оканчиваться на 6). Но $В \neq 6$, так как $К=6$. Значит, $В=4$. Но $64^2=4096$, то есть $Н=4$, что невозможно, так как тогда $Н=В$. Следовательно, $К \neq 6$.

Осталась единственная возможность: $К=9$. Тогда В – либо 3, либо 7. Проверим вариант $В=3$: тогда $93^2=8649$, что соответствует условию задачи. Если $В=7$, то $97^2=9409$, откуда $К=Н$, что противоречит условию.

Итак, окончательный и единственный ответ: КВАНТИК = 9328649.

9. Ответ: можно, например, так:



10. Ответ: 40 граммов.

Обозначим отношение длины левого плеча весов к правому через k. Здесь k – некоторое положительное число, которое может быть как больше, так и меньше 1.

Пусть, для определенности, при взвешивании одного пузырька аптекарь положил пузырек на левую чашку весов, а гири – на правую (если же было наоборот, просто подойдем к весам с противоположной стороны). Тогда можно записать уравнение: $xk=50$, где x – истинный вес пузырька (в граммах).

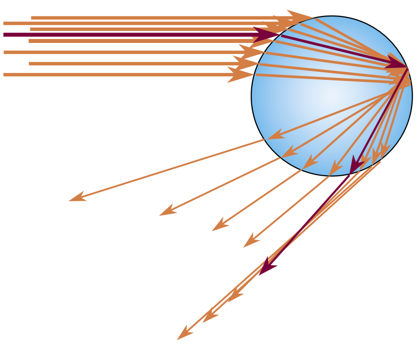
При взвешивании сразу двух пузырьков аналогично получаем: $2xk=64$, и поделив второе уравнение на первое, имеем: $2=1{,}28$.

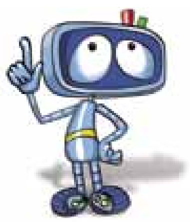
В последнее равенство как-то слабо верится. В чем же дело? По-видимому, в том, что при втором взвешивании аптекарь положил пузырьки на *правую* чашку весов, а гири – на *левую*. Тогда получаем: $2x=64k$, откуда $k=2x/64=x/32$. Подставив это значение в самое первое уравнение, имеем: $x^2/32=50$, и истинный вес пузырька $x=40$ граммов.

Примечание. Между прочим, описанная ситуация подсказывает, как найти истинный вес груза на неравноплечих весах, не производя их наладку и регулировку. Надо просто взвесить его дважды, положив груз последовательно на одну и другую чашу весов, а затем взять *среднее геометрическое* от полученных результатов.

РАДУГА (см. «Квантик» №3)

1. Разбирая причину возникновения радуги, мы выяснили, что капли воды отбрасывают солнечный свет во многие стороны. Радугу создают только те лучи, которые отклонились на наибольший угол от просто отражённого назад луча (см. рисунок). Но ведь есть и другие, менее отклонённые лучи, их мы тоже видим. Значит, наблюдаемое свечение – это просто остальные, менее интенсивные отражённые лучи.





2. Такую радугу образуют лучи, отразившиеся в капле не один раз, как в уже рассмотренном нами случае, а два раза. Из-за этого яркость второй радуги значительно меньше, и она редко видна. По той же причине вторая радуга получается вывернутой наизнанку – цвета в ней идут в обратном порядке (см. рисунок).

Светлая область неба (см. задачу 1) для второй радуги тоже оказывается «вывернутой» – располагается снаружи второй радуги. Эта область, как и сама вторая радуга, менее яркая по сравнению с областью внутри первой радуги.

Лучи, отразившиеся в каплях более чем два раза, тоже образуют свои радуги, но эти лучи куда менее яркие, и радуги от них очень редко заметны.

НОВЫЙ ДИВАН МИСТЕРА КИНГА (см. «Квантик» №3)

Ответ: диван стоит 100 монет.

Решение. Пусть диван стоит x монет, первый продавец завышает все числа в a раз, второй занижает все числа в b раз, а в остальном они говорят правду. Разберёмся в том, что сообщили продавцы мистеру Кингу. Сначала первый сказал, что диван стоит 600 монет, т.е. $ax=600$. Затем второй заявил, что первый продавец все числа завышает в 3 раза – значит, на самом деле первый всё завышает в $3b$ раз, то есть $a=3b$. Наконец, первый говорит про второго продавца, что тот все числа занижает в 12 раз, то есть на самом деле $ab=12$. Мы получили три уравнения: $ax=600$, $a=3b$, $ab=12$. Перемножив два последних, получаем $a^2b=36b$, откуда $a^2=36$, то есть $a=6$. Тогда, из первого уравнения, $x=100$.