ОТВЕТЫ РЕШЕНИЯ Указания

КОНКУРС, V ТУР (см. «Квантик» №5)

21. Конечно, надо предполагать, что аквариум имеет, скажем, форму прямоугольного параллелепипеда (чтобы уровень воды падал равномерно с уменьшением объёма) и что шарики всегда полностью покрыты водой. Обозначим исходный объём за x. Вынув половину шариков, мы понизили исходный уровень на треть – значит, половина шариков составляла $x/3$. Теперь в аквариуме осталось $x/3$ л воды и столько же шариков, поэтому, вынув половину этих шариков, мы уберём четверть объёма, то есть понизим имеющийся уровень на четверть.

22. Да, обязательно. Докажем это.

Заметим, что на четырёх верхних горизонталях доски расположены четыре ладьи – по одной на каждой горизонтали. Пусть в левом верхнем квадрате стоят N из этих четырёх ладей. Тогда остальные $4-N$ ладей находятся в правом верхнем квадрате.

Аналогично, четыре ладьи стоят на четырёх левых вертикалях доски, и если в левом верхнем квадрате N ладей, то в левом нижнем квадрате их $4-N$, то есть столько же, сколько и в правом верхнем квадрате.

23. Конечно, нет. Просто в тоннеле звук движущегося поезда отражается от близких стенок тоннеля и возвращается в вагон, усиливая шум. При движении по открытой местности этого не происходит, так как предметы, от которых мог бы отражаться звук, находятся далеко. Похожий эффект проявляется, когда два пассажирских поезда проезжают мимо друг друга – в вагонах сразу становится очень шумно.

24. Первые 9 чисел можно написать такие: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Если нам попадётся плюс, то число отгадано. Если плюса нет, то есть хотя бы один минус – ведь мы перебрали все варианты старшей цифры числа. Пусть минус стоит рядом ровно с одним числом. Тогда у этого числа совпадает с задуманным именно старшая цифра, а вторая задуманная цифра – 0. Если же минусов два, скажем, рядом с числами 22 и 55, то задумано либо число 25, либо число 52. Назвав 10-м одно из этих чисел, мы поймём по ответу, было задумано оно или второе число.

25. 55° или 125°.

За 20 минут – треть часа – минутная стрелка повернётся на треть полного оборота, то есть на 120°. А часовая стрелка – всего на 10°, так как движется в 12 раз медленнее. При этом минутная стрелка может успеть обогнать часовую стрелку (рис. 1, *а*) или нет (рис. 1, *б*) – на рисунках красным цветом показано начальное положение стрелок, синим – положение через 20 минут. Пусть изначально угол между стрелками был равен α. Тогда в первом случае получаем уравнение $2\alpha+10^\circ=120^\circ$, откуда $\alpha=55^\circ$. Во втором случае $2\alpha-10^\circ+120^\circ=360^\circ$, откуда $\alpha=125^\circ$.

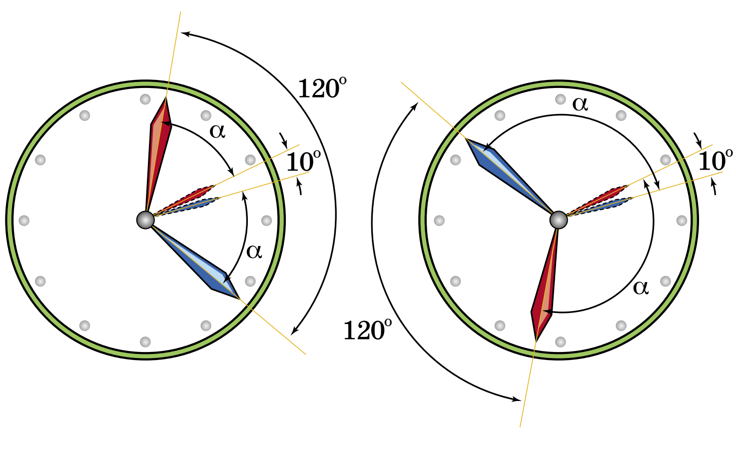

Рис.1,*а* Рис.1,*б*

НЕОБЫЧНЫЕ ПРУЖИНКИ («Квантик» № 6)

Как ни странно, при разрезании красной верёвки груз поднимется!

Пусть наш груз весит 100 кг. Пока красная верёвка не разрезана, а зелёных верёвок ещё нет, весь этот груз растягивает каждую пружинку всем своим весом. Действительно, уберите любую из пружинок – груз упадёт. Когда же красную верёвку перерезают, мы получаем, что к грузу как бы отдельно прикреплены верхняя пружинка с зелёной веревкой и ещё зелёная верёвка с нижней пружинкой. Получается, что теперь две пружинки держат груз вместе – можно мысленно поделить его пополам и считать, что первая пружинка держит одну половинку, а вторая – другую. Поэтому обе пружинки будут растянуты меньше, чем до разрезания, ведь на каждой лишь по 50 кг, и значит, груз поднимется.

КТО ПРАВ? («Квантик» № 6)

Прав Вася: шар обязательно надо выпускать под углом α к борту. Для доказательства нам потребуется одна теорема из школьного курса геометрии: если два угла с вершинами на окружности опираются на одну и ту же дугу этой окружности, то эти углы одинаковы.

Обозначим точки, отвечающие шару и лузе, через A и B. Опишем вокруг треугольника AXB окружность (рис. 2). Если борт не параллелен прямой AB, эта окружность пересечёт его в двух точках: одной из них будет X, а вторую обозначим через C. Заметим, что угол BAX, равный α, опирается на ту же дугу, что и угол BCX, откуда угол BCX тоже равен α. Углы ACB и AXB опираются на одну дугу, и так как угол AXB равен $180^\circ - 2\alpha$, то угол ACB – тоже. Тогда угол, под которым отрезок AC наклонён к борту, равен $180^\circ-(180^\circ-2\alpha)-\alpha=\alpha$. Значит, если направить шар в точку C, он, отразившись в ней от борта, попадёт в лузу.

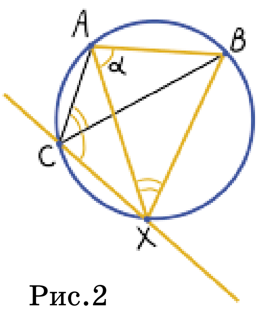

Рис.2

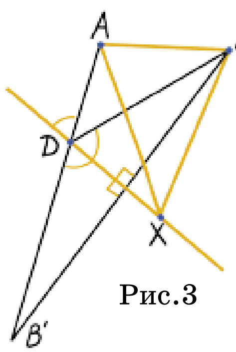

Рис.3

А почему подходящее направление, в котором можно выпустить шар, единственно? Пусть можно направить шар в некую точку D борта так, что он, отразившись, попадёт в точку B (рис. 3). Проведём из точки B прямую, перпендикулярную борту, и обозначим через B' точку пересечения этой прямой с лучом AD. В треугольнике BDB' борт служит и высотой, и биссектрисой, следовательно этот треугольник равнобедренный. Значит, точка B' симметрична точке B относительно борта. Такая точка ровно одна, и тем самым направление луча AD определяется однозначно – он проходит через точку B'.

ПРЯМЫЕ ИЗ КРИВЫХ («Квантик» № 7)

Найдём уравнение прямой нашего семейства, проходящей через точку $(t, 0)$. По построению эта прямая проходит и через точку $(t+1,\ t)$. Тогда искомое уравнение есть $y/(x-t)=t/1$ (мы записали отношение сторон подобных треугольников на рис. 4).

Мы ищем такие точки (x, y), что через них проходит ровно одна прямая из нашего семейства. Значит, у уравнения $y/(x-t)=t$ есть только одно решение относительно t. Переписав его в виде $t^2-xt+y=0$, видим, что дискриминант уравнения должен быть равен 0. Это означает, что $4y-x^2=0$, то есть $y=x^2/4$. Это и есть получившаяся парабола.

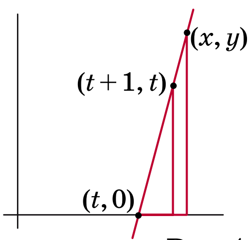

Рис.4