

СВОИМИ РУКАМИ

Григорий Фельдман

КРИВЫЕ ИЗ ПРЯМЫХ

Возможно, вы уже встречались с графиками функций (обычно их начинают изучать в 7 классе) и даже строили их. Часто это делают так: выбирают число t , находят значение $f(t)$ функции и отмечают соответствующую точку $(t, f(t))$ на графике. Нарисовав подобным образом ещё несколько точек и проводя через них плавную кривую, получают график $f(x)$.

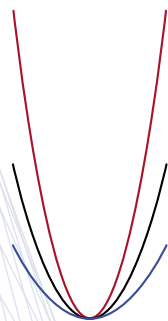


Рис. 1

График функции $y=kx^2$ называется параболой. На рис. 1 показаны графики функций $y=kx^2$ для $k=1/2, 1, 2$.

Упражнение: какое значение k какой из нарисованных парабол соответствует?

Окружность тоже можно построить подобным образом. А ещё окружность вырисовывается, если провести прямые,

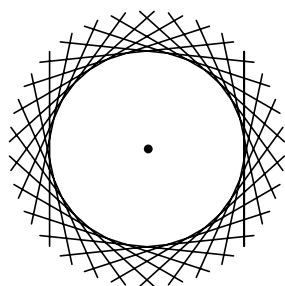


Рис. 2

удалённые от данной точки на фиксированное расстояние (см. рис. 2). Определение ниже – обобщение этого примера.

Говорят, что кривая огибает данное семейство прямых, если через каждую её точку проходит ровно одна прямая из этого семейства. Кривую при этом называют огибающей.

Это определение не всегда работает так, как хотелось бы, но правильное определение слишком мудрёное, и мы ограничимся такой упрощённой версией. Суть определения понятна из следующего красивого примера. Описанные ниже построения советуем проводить на клетчатой бумаге.

Отметим точку $A(0,1)$. Для каждой точки X на прямой абсцисс проведём прямую, проходящую через X и перпендикулярную AX . Проще всего нарисовать копию треугольника AOX так, как показано внизу на рис. 3 (тут поможет клетчатая бумага); тогда прямая, содержащая гипотенузу нового треугольника, и есть нужный перпендикуляр.

Оказывается, огибающая таких прямых – это парабола. Доказательство см. на стр. 31.

Вопрос: как изменится парабола, если точку A «подвинуть» вверх?

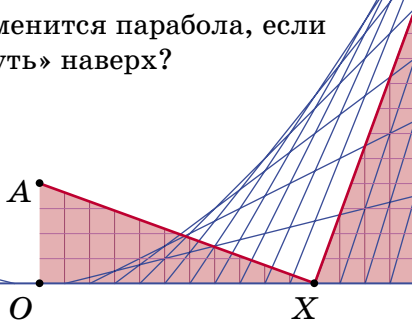


Рис. 3

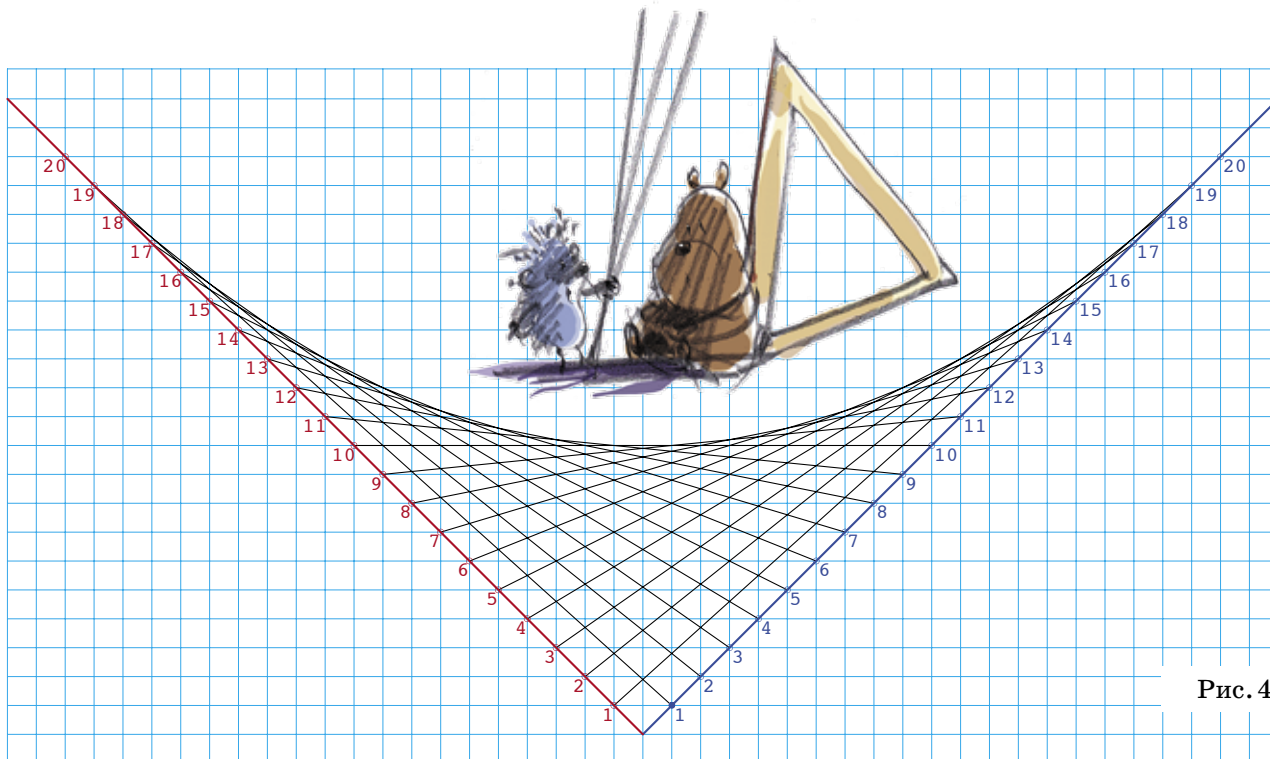


Рис. 4

Параболу можно увидеть и как огибающую другого семейства прямых.

Проведите синюю прямую $y = x - 10$ и красную прямую $y = -x - 10$. Отметьте синим точки пересечения синей прямой с узлами сетки и красным – точки пересечения красной прямой с узлами сетки. Пронумеруйте красные и синие точки так, как на рис. 4. Обе точки 10 (и красная, и синяя) должны попасть на ось абсцисс.

Теперь проведите прямую через синюю точку 10 и красную точку 10, через синюю точку 9 и красную точку 11, через синюю 11 и красную 9, через синюю 8 и красную 12, через синюю 12 и красную 8, и так далее. У вас должна получиться картинка, похожая на рис. 4. Кривая, которая видна, – парабола. Попробуйте доказать этот факт аналогично доказательству из предыдущего примера.

Удивительно, но с помощью параболы можно «построить» окружность. Для этого из каждой точки параболы опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Построим на каждом таком перпендикуляре окружность как на диаметре. Получится картинка, как на рис. 5. На ней явно вырисовывается окружность.

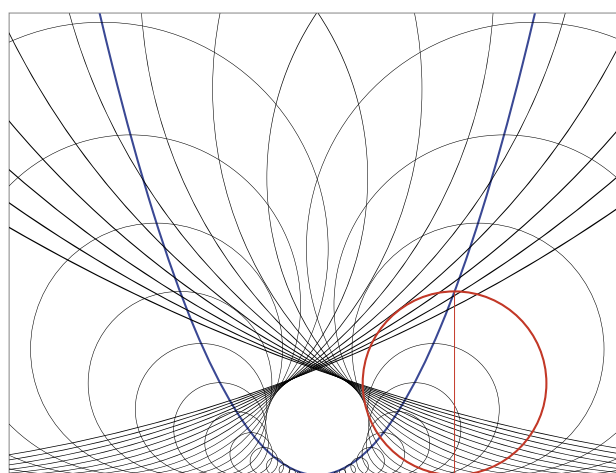


Рис. 5