ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Игорь Акулич

приключения продолжают

– Привет, Федя, чего такой грустный сегодня?

– Понимаешь, Даня, никак задачку решить не могу – и опять про часы!

– Какую это?

– А вот послушай[1]. «Три мухи решили покататься на стрелках часов...»

– На твоих, что ли? Как же они влезут под стекло?

– Хватит шуток! Часы, конечно, большие и без стекла – настенные, например. Слушай дальше. «С этой целью ровно в полдень одна из них села на часовую стрелку, вторая – на минутную, третья – на секундную. Дальше они катались, соблюдая такое правило: если одна стрелка обгоняет другую, то сидящие на них мухи в момент обгона меняются местами. Сколько оборотов опишет каждая муха до полуночи?»

– А там не сказано, что делать, если одновременно совпадут все три стрелки? Как тогда им пересаживаться?

– Ты что говоришь! Совпадение всех стрелок возможно только в полдень и в полночь – мы с тобой это уже доказали!

– Да, верно, я и забыл.

– Так что посоветуешь?

– Даже и не знаю. Знаешь что, давай решим сначала задачу попроще. Пусть у нас две мухи сидят на двух стрелках – часовой и минутной. Если эту одолеем, то, может, и первую решим.

– Думаю, можно использовать результаты решения задачи о совпадении часовой и минутной стрелок. Мы, помнится, доказали, что они совпадают каждые 12/11 часа. Значит, к моменту первого совпадения вторая муха как раз совершит 12/11 оборота – ведь для минутной стрелки каждый час – это один оборот. Часовая стрелка движется в 12 раз медленней, поэ-

[1]Автор задачи – С.Г.Волченков

продолжаться

тому первая муха проедет всего 1/11 оборота. Но потом они меняются, и от первого до второго совпадения стрелок первая муха, наоборот, проделает 12/11 оборота, а вторая – 1/11. Затем...

– Ну и хватит! Всего получается 11 равных промежутков времени, когда мухи попеременно движутся то с одной, то с другой скоростью. Поэтому муха, сидевшая сначала на часовой стрелке, проедет $\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}=6$ кругов, а вторая, у которой чередование обратное, $\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}+\frac{1}{11}+\frac{12}{11}=7$ кругов. Ишь ты, целые числа получились!

– В этом как раз нет ничего удивительного. Мухи стартовали, когда стрелки были вертикальны (в полдень), и финишировали при таком же положении стрелок (в полночь). Значит, они проделают непременно по целому числу кругов!

– Ну, хорошо. Но это не даёт подсказки к решению исходной задачи – с тремя мухами (и стрелками).

– Верно, здесь уже так просто не подсчитаешь. Слагаемых будет немереное количество. Но кое-что можно оценить. Например, и здесь каждая муха проделает целое число оборотов. Кроме того, поскольку в каждый момент времени на каждой стрелке сидит ровно одна муха, то суммарное число кругов, проделанное стрелками, должно равняться суммарному числу кругов, проделанному мухами.

– Ну, хоть что-то. Сколько же это будет? Часовая стрелка проделает 1 оборот, минутная – 12, секундная – 720. Всего получается 733 оборота. В общем, надо как-то распределить эти обороты между мухами, но как?

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

– Придумал! Заметь, что мухи не обгоняют друг друга – ведь при обгоне стрелок мухи меняются местами! Следовательно, та муха, что сразу «уехала» вперед (сидящая первоначально на секундной стрелке) проделает не меньше оборотов, чем остальные две, а муха, сначала занимавшая часовую стрелку, – не больше остальных.

– Значит, нам надо не просто найти три целых числа, в сумме дающих 733, а три таких числа, что первое не меньше второго, а второе – не меньше третьего. Но всё равно, вариантов слишком много...

– Стоп! Эврика! Не так уж и много! Помнишь, мы когда-то «привязывались» к одной из стрелок, считая ее неподвижной? А давай теперь «привяжемся» к мухе, которая вначале сидит на часовой стрелке. Итак, что она видит? Мухи, сидящие на двух других стрелках, сперва «уезжают» по кругу вперед, а потом иногда догоняют ее сзади, но повторно обогнать не могут! Это значит, что разность количества оборотов, проделанных любыми двумя мухами, не больше 1.

– Действительно! И это всё решает! Ведь теперь нам надо подобрать не просто три натуральных числа, дающие в сумме 733, а три числа, которые различаются между собой не больше чем на 1. Это очень просто: $733 = 245 + 244 + 244$, то есть муха, стартовавшая на секундной стрелке, проделает 245 оборотов, а остальные две – по 244. Всё!

– Кстати, тот же подход можно было применить и к варианту с двумя мухами. Там стрелки в сумме совершили $1 + 12 = 13$ оборотов, что разбивается на сумму двух натуральных чисел, различающихся не больше чем на 1, как $7 + 6$. Значит, мухи проделают 7 и 6 оборотов.

– Гора с плеч!

– Тогда, может, подумаем над такой задачей...

– Нет уж, хватит! Хорошего понемножку! В другой раз!

Художник Алие Аблямитова