Александр Бердников

Простые шахматы

В большинстве видов спорта победитель определяется исходя из его физических возможностей: скорости, силы, выносливости и так далее. В некоторых видах важную роль играют и другие качества, например, артистичность, как в фигурном катании или художественной гимнастике. При этом результат спортсмена зависит уже не только от него самого, но и от судьи. Если время, за которое преодолена дистанция, – это легко и точно замеряемая величина, то артистичность измерить уже гораздо сложнее, особенно если требуется сравнить два хороших, но непохожих выступления. А что бы вы сказали, если бы вам предложили соревноваться с соперником в игре? Да не простой, а в такой, что у вашего противника всегда есть непроигрышные ходы. То есть существует инструкция, описывающая, как не дать вам выиграть. Не очень заманчиво, правда? Однако одна из таких игр уже тысячу лет постоянно собирает огромную аудиторию игроков. По ней проводятся турниры, международные чемпионаты. Это – всем известные шахматы.

Почему же, спросите вы, в эту игру продолжают играть, несмотря на то, что у одного из игроков есть стратегия? Казалось бы, победитель известен заранее. А всё потому, что хотя стратегия и есть, она пока что никому не известна, а будь она известна, весьма вероятно, что удержать её целиком в голове было бы крайне сложно. Так что и по сей день противники в этой игре остаются в примерно равных положениях, так как игроку с выигрышной стратегией не удаётся ею пользоваться – ведь он её не знает.

Хорошо, тогда возникает ещё более интригующий вопрос: как же так вышло, что стратегию мы не знаем, но, несмотря на это, уверены, что она есть? Вместо самой стратегии у нас есть метод, как её найти. Стратегия получения стратегии игры в шахматы, так сказать. Причём такой метод есть для любой конечной игры с полной информацией для двух игроков (таковы, например, крестики-нолики на любой конечной доске). Разберём на примере простой игры, что значат эти непонятные слова и как искать стратегию.

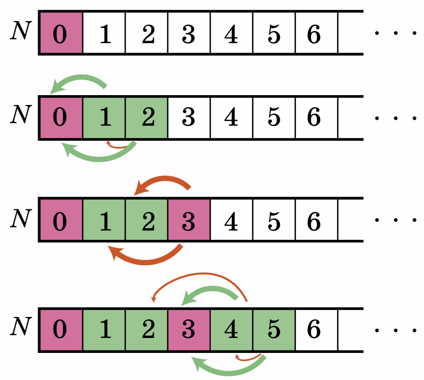
Пусть изначально есть натуральное число N, и игроки по очереди вычитают из него или 1, или 2. Проигрывает тот, кто получает на своём ходу отрицательное число. Эта игра конечна: всевозможных партий в ней конечное число и все они заканчиваются за конечное число ходов. То, что эта игра с полной информацией, означает, что игроки перед своим ходом имеют всю информацию о том, в каком состоянии была партия и в какие состояния она перейдёт после каждого из возможных ходов. В частности, нет случайного, не зависящего от игроков процесса, влияющего на исход игры (например, броска игрального кубика или тасования колоды).

Покажем, как в этом случае сработает наш метод (точнее, его упрощённая форма). Про каждое число N в качестве исходного данного нам хочется узнать, выиграет в соответствующей игре первый игрок или второй. Если первый, будем называть N хорошим, если выиграет второй – плохим. Итак, начнём анализировать игру с конца.

Ясно, что число 0 плохое. Теперь главная идея: если первый игрок может своим ходом сделать число плохим, то он выиграет, если нет – проиграет. Действительно, после такого хода игра будто начнётся с начала, только уже с меньшего числа, и игроки поменяются местами: теперь ход другого игрока. Первому игроку для выигрыша необходимо и достаточно «подставить» второго игрока, оставив после себя плохое число. Поэтому число плохое тогда и только тогда, когда из него нельзя попасть в другое плохое число.

Всё, теперь относительно всех чисел очень легко выяснить, плохие они или хорошие. 0 плохое, значит 1 и 2 хорошие, так как из них можно попасть в плохой 0. 3 плохое, так как из него ходы ведут только в хорошие числа 1 и 2. Далее, 4 и 5 опять хорошие: из них есть ходы в плохое 3. Действуя аналогично, можно шаг за шагом выяснить для любого числа, кто выиграет, начав игру с него. К этой задаче теперь несложно даже дать явный ответ (сделайте это самостоятельно). Решающим моментом при наших вычислениях было то, что из очередной позиции X можно попасть только в те, про которые мы уже знаем, кто в них выиграет. А значит, можем вычислить, кто выиграет в позиции X.

Проведём те же рассуждения в общем случае. В частности, этим мы покажем, что даже в такой, казалось бы,



запутанной и непредсказуемой игре, как шахматы, у одного из игроков есть непроигрышная стратегия.

Правда, нужно ещё проверить, что шахматы – это конечная игра с полной информацией. Если с информацией всё очевидно (если закрыть глаза на ограничение партии по времени), то с конечностью всё сложнее. Для конечности в шахматах есть специальное правило, запрещающее повторять любую позицию более двух раз. Всего расстановок фигур на доске не более 13^{64} (на каждое поле можно поставить любую из 12 фигур или ничего), при каждой расстановке ещё нужно выбрать, чей ход ($\times 2$) и кто уже делал рокировку ($\times 4$). Поэтому любая партия не длиннее $2\times(8\times 13^{64})=2N$ ходов и всего партий не больше, чем последовательностей из таких позиций, значит, не более N^{2N}.

Давайте разбираться, как же находить стратегию. Под позицией в игре будем понимать не только всю необходимую информацию о её состоянии в данный момент (например, в шахматах – расстановку фигур, чей ход, кто делал рокировку, а кто нет), но и то, сколько ходов уже прошло. Для начала выпишем все возможные позиции «по слоям»: на верхнем нулевом слое будет начальная позиция, на следующем – все возможные после одного хода позиции, и вообще, на n-м слое располагаются позиции, в которые можно попасть за n ходов. Раз игра конечна, то и число наших слоёв конечно. Пусть последний имеет номер L. Посмотрим на позиции с номером L. Поскольку из них ходов нет, то партия окончена, и можно назвать победителя.

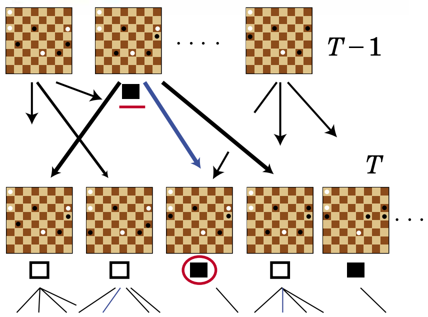


Рис. 1, *а*

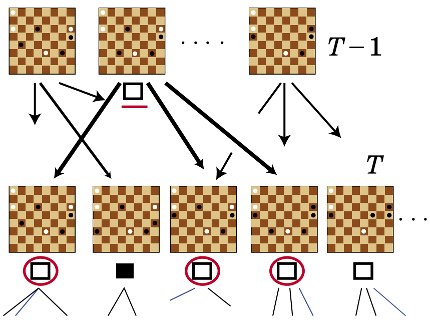


Рис. 1, *б*

Ходят чёрные, номер хода T. Цвет прямоугольника под позицией показывает, для кого она выигрышная. Стрелки – возможные ходы. Синяя стрелка – выигрышный ход. Обведены те прямоугольники, которые нужны для вычисления цвета подчёркнутого прямоугольника.

Теперь посмотрим на позиции на предыдущем слое $L-1$. Если ходов из такой позиции нет, мы, как и раньше, узнаём победителя. Иначе тот игрок, чей сейчас ход (пусть для определённости чёрные), может пойти в какие-то позиции с номерами L, про которые мы уже всё выяснили. Если среди них есть та, в которой он выиграет, он может туда пойти и выиграть (рис. 1, *а*)*. Если нет, то куда бы он ни пошёл, он проиграет (рис. 1, *б*). Значит, как и раньше, перебрав все позиции, куда можно сходить, мы узнаём победителя и в позиции с номером $L-1$!

Теперь можно проделать то же самое и с предыдущими позициями: просматриваем все возможные ходы, их результаты мы уже обсчитали. Теперь просто записываем победителем того, чей ход, если он записан победителем хотя бы в одной из доступных позиций,

---

* На рисунке изображён переход из произвольного слоя $T-1$ в слой T. В нашем случае $T=L$

а иначе записываем его соперника. Так мы, шаг за шагом, доберёмся до самой первой позиции, когда ещё никто не ходил, и узнаем победителя в ней. Но это и есть победитель всей игры: тот, кто побеждает, если начинать с первого хода с «нетронутой доски»!

При этом в процессе наших вычислений мы рисовали выигрышные ходы ровно в том случае, когда очередь ходить у победителя. Сохранив все эти вычисления, мы получим нарисованную выигрышную стратегию, даже больше. Эта инструкция позволяет выиграть, даже если изначально вы не должны были победить, но противник в процессе игры ошибся, дав вам шанс. Нужно просто после каждого хода находить свою позицию на такой «карте» и ходить согласно нарисованным нами «выигрышным» синим стрелочкам, ведущим в выигрышные для нас позиции. По построению, после любого хода противника мы в таком случае попадём в позицию, из которой опять идёт «выигрышная стрелочка». Если тем временем ещё не выиграем.

На самом деле, в шахматах ещё бывает ничья, что немного усложняет рассуждения. Попробуйте их провести, когда возможна ничья, заодно проверите себя, поняли ли вы суть происходящего. Соответственно, найдём мы такой процедурой не победителя, а игрока, способного гарантировать себе по крайней мере ничью.

После всего этого возникает очередной закономерный вопрос. Если мы построили такую отличную инструкцию, как вычислить стратегию в шахматах, почему её до сих пор не реализовали? На случай слишком объёмных вычислений у нас есть компьютеры. Дело в том, что подобные переборы сложны даже для компьютеров. Наши оценки на число позиций и ходов, сделанные в самом начале, очень грубы – мы считали их с повторениями, насчитали много невозможных позиций и ходов (тоже, кстати, по нескольку раз). Однако и более точные современные оценки неутешительны. Согласно им, для полного анализа игры понадобится около 10^{100} лет работы мощнейшего на сегодняшний день суперкомпьютера. Это не просто много. Если количество атомов во всей Земле умножить само на себя, получится примерно столько же! Поэтому могущество современной вычислительной техники здесь пока что пасует, оставляя нам пространство для импровизаций и наслаждение непредсказуемой игрой.

Художник Леонид Гамарц