СМОТРИ!

Григорий Фельдман

МАГИЯ ЧИСЕЛ

Когда в кино показывают математиков, они зачастую выглядят безумными одиночками, решающими задачи, в которых никто ничего понять не в состоянии – даже формулировка задачи неподвластна простым смертным. Небольшая доля истины в этом есть. Так, для того чтобы понять условие нашумевшей гипотезы Пуанкаре, доказанной российским математиком Григорием Перельманом, нужно пройти университетский курс геометрии.

Но бывают и исключения: некоторые утверждения, интересующие в настоящее время математиков, формулируются очень просто. Правда, доказательства, как правило, оказываются исключительно сложны; но давайте узнаем несколько проблем, которые волнуют математический мир!

Начнём с известного многим примера.

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА, ОБЕСЦЕНИВШАЯСЯ ПРЕМИЯ И МУЛЬТИКИ

В 1637 году Пьер Ферма́, великий французский математик, написал на полях книги Диофанта «Арифметика» следующие строки:

> *...невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него.*

Так была сформулирована **Великая теорема Ферма**. На современном языке она звучит чуть менее поэтично, но более понятно:

При натуральном $n > 2$ не существует таких натуральных чисел a, b, c, что $a^n + b^n = c^n$.

Запись a^n обозначает произведение $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n раз).

Давайте немного поразмыслим над этим утверждением.

Задача 1. Изменим формулировку теоремы Ферма: пусть $n = 2$, а всё остальное остаётся прежним. Докажите, что получилась неверная теорема. Для этого подберите такие натуральные числа a, b, c, чтобы выполнялось требуемое равенство.

Задача 2. Докажите теорему Ферма в случае, когда числа a, b, c нечётны.

Простота и изящество теоремы, а также лукавый намёк Ферма на поразительное доказательство влекли к ней не только профессиональных математиков, но и любителей. Один из них, немецкий богач Вольфскель, в 1908 году завещал 100 000 немецких марок тому, кто предъявит верное доказательство. Приз подогрел и без того немалый интерес к теореме; правда, после Первой мировой войны премия обесценилась.

Ныне теорема Ферма доказана совместными усилиями многих математиков. Её доказательство очень сложно, занимает несколько сотен страниц непростого математического текста. Завершающий шаг в доказательстве сделал английский математик Эндрю Уайлс при помощи своего ученика Ричарда Тейлора в 1994 году.

Существует немало троек чисел, которые «почти» удовлетворяют условиям теоремы Ферма. Например, одна из них приведена в мультсериале «Симпсоны»*:

$$1782^{12}+1841^{12}=254121025\ldots,$$
$$1922^{12}=254121025\ldots$$

Задача 3. Как можно легко, без калькулятора, понять, что эти три числа не являются решением уравнения Ферма?

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА-БЛИЗНЕЦЫ

Особое значение в математике имеют простые числа: так называют числа, которые не делятся ни на какие другие натуральные числа, кроме самого себя и единицы. При этом 1 не считается простым числом.

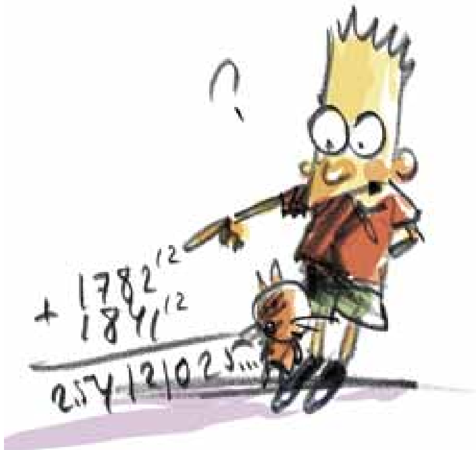
Важность простых чисел демонстрирует

> **Основная теорема арифметики.** *Каждое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо представляется в виде произведения нескольких простых чисел, причём такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей.*

Задача 4. Представьте 2012 в виде произведения простых чисел.

Зададимся естественным вопросом: а сколько простых чисел? Предположим, их конечное число. Обозначим произведение всех простых чисел буквой N. Число N делится на каждое простое число,

СМОТРИ!



* Получающиеся числа очень велики, поэтому показаны только несколько первых цифр.

СМОТРИ!

Первые несколько простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157…

а значит, следующее за ним число $N + 1$ имеет остаток 1 от деления на любое простое число, то есть не делится на него. Поэтому число $N + 1$ не является простым и не представляется в виде произведения простых чисел, что противоречит основной теореме арифметики. Итак, мы доказали теорему:

Теорема. *Простых чисел бесконечно много.*

Заметим, что встречаются пары простых чисел, отличающихся друг от друга на 2. Например: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43 и т. д. Такие пары называются простыми числами-близнецами.

Гипотеза. *Простых чисел-близнецов бесконечно много.*

Удивительно, но столь просто звучащее утверждение до сих пор не доказано. Пока что найдены (с помощью компьютерных вычислений) числа-близнецы, для записи каждого из которых нужно более 200 000 десятичных знаков.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ИЗ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Будем говорить, что k чисел, расставленных в порядке возрастания (или убывания), образуют арифметическую прогрессию с разностью d, если разность любых двух соседних чисел равна d. Например, числа 2, 5, 8, 11 образуют арифметическую прогрессию с разностью 3.

Задача 5. Найдите арифметическую прогрессию длины 3 с разностью 2, состоящую только из простых чисел. Докажите, что такая прогрессия единственна.

Если вы попробуете найти арифметическую прогрессию длины 5 из простых чисел, то увидите, что это весьма непросто. Но тем не менее она существует, и не одна. Вот, например, такая прогрессия с разностью 6: 5, 11, 17, 23, 29.

Верна следующая теорема:

Теорема Грина – Тао. *Для любого натурального числа k найдётся арифметическая прогрессия длины k, состоящая только из простых чисел.*

Она была доказана в 2004 году австралийцем Теренсом Тао и англичанином Беном Грином. Теренсу

Тао в 2006 году была присуждена премия Филдса – самая престижная премия для математиков.

ГИПОТЕЗА ГОЛЬДБАХА И БЕССИЛИЕ КОМПЬЮТЕРОВ

Как мы уже знаем из основной теоремы арифметики, любое натуральное число либо простое, либо представляется в виде произведения нескольких простых чисел.

Задача 6. Докажите, что любое натуральное число, большее 3, представляется в виде суммы нескольких простых чисел.

После решения задачи 6 возникает логичный вопрос: каково минимально возможное количество слагаемых в этой сумме? Аналогичным вопросом задался в 1742 году немецкий математик Кристиан Гольдбах и в письме к швейцарскому математику Леонарду Эйлеру высказал такую гипотезу:

Гипотеза Гольдбаха. *Любое нечётное число, большее 5, представляется в виде суммы трёх простых чисел.*

Раздумывая над этой гипотезой, Эйлер выдвинул такое утверждение:

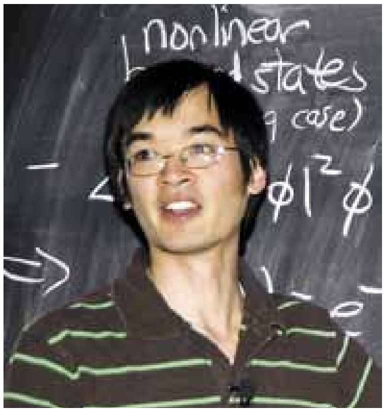
Гипотеза Эйлера. *Любое чётное число, большее 3, представляется в виде суммы двух простых чисел.*

Задача 7. Докажите, что если верна гипотеза Эйлера, то верна гипотеза Гольдбаха.

Ситуация с доказательством этой гипотезы весьма любопытная. В 1937 году советский математик И.М. Виноградов доказал, что все нечётные числа, большие некоторого очень большого числа N (записывающегося более чем 6 миллионами цифр), представляются в виде суммы трёх простых. Казалось бы, осталось на компьютере перебрать все числа, меньшие N. Но, несмотря на прогресс компьютеров, вычислительных мощностей не хватает, чтоб проделать этот перебор.

С другой стороны, в 1930 году советский математик Л. Г. Шнирельман доказал такой факт: любое число представляется в виде суммы не более чем 800 000 простых. Конечно, результат немного забавный (на фоне требований гипотезы). К настоящему времени доказано, что любое число представляется в виде суммы не более чем 7 простых.

СМОТРИ!



Теренс Тао

Художник Сергей Чуб