НАШ КОНКУРС («Квантик» №7)

31. *Заяц соревновался с черепахой в беге на 100 м. Когда заяц прибежал к финишу, черепахе оставалось пробежать ещё 90 м. На сколько метров надо отодвинуть назад стартовую линию для зайца, чтобы при новой попытке оба бегуна пришли к финишу одновременно?*

Решение. Пока заяц бежал 100 м, черепаха пробежала 10 м, то есть заяц бежит в 10 раз быстрее. Тогда пока черепаха будет бежать 100 м, заяц пробежит $10 \cdot 100 = 1000$ м, то есть линию надо отодвинуть на 900 м назад.

32. *Один странный мальчик по средам и пятницам говорит только правду, по вторникам всегда лжёт, а в остальные дни может и солгать, и сказать правду. Семь дней подряд мальчика спрашивали, как его зовут. Первые шесть ответов, по порядку, были таковы: Женя, Боря, Вася, Вася, Петя, Боря. А как он ответил на седьмой день?*

Решение. Запишем все семь ответов подряд по кругу (один мы пока не знаем). Среди них есть два одинаковых правдивых ответа, идущие через один – которые мальчик дал в среду и в пятницу. Но среди шести известных нам ответов таких нет. Значит, на седьмой день мальчик ответил правду, и в тот день была среда или пятница. Если это была среда, то в предыдущую пятницу он ответил «Боря», и вчера (во вторник) – тоже ответил «Боря». Этого быть не может – ответы одинаковые, но по средам мальчик говорит правду, а по вторникам лжёт. Получается, что седьмой день – пятница. Тогда в среду (на пятый день) мальчик ответил правду. Значит, он Петя и назовёт это имя на седьмой день.

33. *Как повесить штору на карниз аккуратно? Вначале вешаем на крайние крючки края шторы. Потом, оттягивая штору, находим её середину и вешаем на средний крючок. То же самое проделываем с каждой половиной, и так далее. При каком числе крючков на карнизе удастся повесить штору по такому методу? (Дайте простое описание таких чисел.)*

Ответ: $2^n + 1 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}} + 1.$

Решение. Давайте называть число крючков, при котором штору можно повесить по описанному методу, удобным. Пусть на карнизе число крючков удобное. Тогда там есть средний крючок. Он как бы делит штору на две одинаковые шторки: у одной он будет самым правым крючком, а у другой – самым левым. И обе эти шторки тоже можно повесить по нашему методу! Значит, числа крючков в них тоже удобные. Если в шторках по N крючков, то во всей шторе будет $2N-1$ крючков. Запомним эту формулу!

Самое маленькое удобное число – это 3. Следующее получается по формуле $2N-1$ из какого-то меньшего удобного числа. Но меньшее число одно – это 3, значит, следующее будет $2 \cdot 3 - 1 = 5$. Третье удобное число тоже получается по формуле из меньшего – но не из 3 (так выйдет снова 5), а из 5. Получается $2 \cdot 5 - 1 = 9$. Такими же рассуждениями получаем дальнейшие числа: 17, 33, 65,...

Но как бы попроще их описать? Подметим закономерность: $3 = 2 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $9 = 2^3 + 1$, и так далее: каждое следующее число на единицу больше очередной степени двойки. Будет ли эта закономерность сохраняться и дальше? Проверяем по формуле: $17 = 2 \cdot (2^3 + 1) - 1 = 2^4 + 2 - 1 = 2^4 + 1$. Следующее число $33 = 2 \cdot (2^4 + 1) - 1 = 2^5 + 1$, и так далее. Видно, что n-е удобное число равно $2^n + 1$.

34. *Можно ли нарисовать на листе бумаги четыре равных квадрата и две перпендикулярные прямые так, чтобы квадраты не перекрывались (даже не касались) и каждая прямая пересекала каждый квадрат по отрезку?*

Решение. Можно – например, так, как показано на рисунке 1.

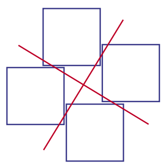

Рис.1

35. а) *В гостиницу на неделю приехал путешественник. У него вместо денег нашлась лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. Хозяин требует платить по одному звену в день без задержек, готов давать сдачу ранее полученными кусками цепочки, но вперёд плату не берёт. Путешественник распилил на цепочке всего одно звено так, что ему удалось расплачиваться все 7 дней. Как он это сделал?*

б) В следующий раз у путешественника оказалась цепочка из 23 звеньев. Можно ли распилить всего два звена, чтобы расплачиваться потом ежедневно 23 дня?

Решение. а) Нужно распилить 3-е звено, тогда цепочка распадётся на 3 куска, состоящих из 1, 2 и 4 звеньев. Проверьте, что всё получится.

б) Надо придумать, на какие куски разделить цепочку, чтобы с их помощью можно было набрать любое число звеньев от 1 до 23. Тогда путешественник может просто каждый раз отдавать все свои куски хозяину, а тот выдаст сдачу, вернув лишние куски. Оказывается, достаточно распилить 4-е и 11-е звенья. Тогда цепочка распадётся на 5 кусков: два единичных (распиленных) звена и ещё куски по 3, 6 и 12 звеньев. Проверьте сами, что всё получается.

ИГРЫ

11 а). Выигрывает первый. Своим начальным ходом он закрашивает центральную клетку полоски (8-ю от края). Полоска как бы делится на две равные части. А дальше на любой ход второго в какую-то часть полоски первый отвечает таким же ходом в другую её часть (ходит симметрично).

11 б). Тут годится почти такое же решение, что и в пункте а), только первый своим начальным ходом закрашивает не одну, а две центральные клетки (10-ю и 11-ю от края).

12. Выигрывает второй: после любого хода первого он будет возвращать фишку на диагональ (ведущую из левого нижнего угла доски в правый верхний угол). То есть на любой ход первого по горизонтали второй отвечает таким же ходом по вертикали, и наоборот. (Сравните с задачей 3.)

13. Выигрывает второй, в обоих пунктах. Пусть первый сделал свой начальный ход. Каким бы он ни был, в ромашке появится «дырка» на месте вырванного лепестка (или двух). В результате ромашка превратится как бы в ряд из лепестков, и в этом ряду можно срывать один или два соседних лепестка. Тогда второй смотрит, сколько лепестков в центре «полоски» – один или два, и срывает их. А дальше ходит симметрично первому. (Сравните с задачей 11.)

14. Выигрывает первый. Сначала он сдвигает фишку на 19 клеток влево (в противоположный конец). Остались возможными ходы на 1, 2, ..., 17, 18 клеток. Разобьём их на 9 пар, в каждой сумма равна 19: 1 и 18, 2 и 17, ..., 9 и 10. Пусть первый в ответ на ход второго отвечает парным ходом в ту же сторону. Суммарно фишка сдвинется на 19, то есть снова окажется в конце полоски. Через 9 пар таких ходов-ответов пары закончатся, и второй не сможет сделать ход.

15. Первым ходом ладья отходит влево на соседнюю клетку – в средний столбец. Если слон пойдёт в средний столбец, то ладья его сразу побьёт. Иначе ладья сдвигается вверх так, чтобы между строкой со слоном и строкой с ладьёй оказалась ровно одна свободная строка (рис. 2).

Рис.2

Слон не сможет сдвинуться ни в эту свободную строку, ни в строку или в столбец с ладьёй, и вынужден отступить обратно в угол. Тогда ладья сдвигается на две клетки вперёд и запирает слона – куда бы он ни пошёл, следующим ходом ладья его побьёт.

16. Выигрывает второй. Разобьём всю доску, кроме центральной клетки, на доминошки – например, так, как показано на рисунке 3. Каждым ходом первый сдвигает фишку на какую-то клетку какой-то из доминошек. Пусть второй ответным ходом сдвигает фишку на другую клетку этой же доминошки. Тогда у него всегда будет возможность сделать ход, и значит, он выиграет.

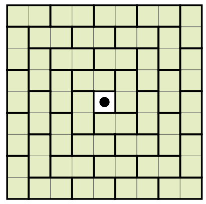

Рис.3

ГОЛОВОЛОМКИ ИЗ ЛЕГО

1. Сложите две фигурки $4\times2\times1$ как на рисунке 4, а потом поставьте одну на другую.

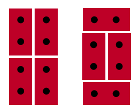

Рис.4

2. Решение – на рисунке 5.

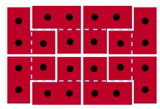

Рис.5

3. Сначала приставьте к красному кубику 4 белых детали с четырёх сторон, чтобы он был виден только снизу и сверху (рис. 6). Потом приставьте по детали сверху и снизу (они показаны на рисунке 6 пунктиром).

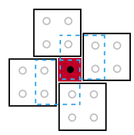

Рис.6

В КАКУЮ СТОРОНУ КРУТИТСЯ ЗЕМЛЯ

Неподвижная звезда на фото – это Полярная звезда, она указывает север. Поэтому восток по правую руку от фотографа. Вращением Земли фотографа уносит на восток. Значит, звёзды на небе крутятся против часовой стрелки вокруг Полярной. Выходит, в начале съёмки звезда, о которой задан вопрос в статье, была в положении Б. Более подробный ответ читайте в следующем номере.