УХА ИЗ МУХИ

Игорь Акулич

Борис Анастасьевич Кордемский (1907–1999) – признанный популяризатор занимательной математики в СССР, а впоследствии – в России. Он написал немало книг и статей, среди которых особое, почётное место занимает, конечно, знаменитая «Математическая смекалка»[1], представляющая собой, по сути, сборник задач различной степени сложности. Встречаются среди них и так называемые ребусы. Этим словом принято называть зашифрованные арифметические примеры, в которых цифры заменены буквами по следующим незыблемым правилам:

Правило 1: одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры.

Правило 2: разные буквы обозначают разные цифры.

Правило 3: первой цифрой многозначных чисел не может быть ноль.

Иногда в ребусах применяются значки «*» (звёздочки), которые, в отличие от букв, могут обозначать *любые* цифры, не обязательно различные, или знак вопроса, обозначающий *любое* количество *любых* цифр.

Решить ребус – значит определить, какие цифры «спрятаны» под буквами.

Целую россыпь ребусов содержит задача 272, и в одном из них читателю предлагается в примере на деление из мухи... сварить уху:

$$\begin{array}{r|l} \text{МУХА} & \text{ХА} \\ \cline{2-2} \underline{\text{ХА}} & \text{УХА} \\ \text{КХ} & \\ \underline{\text{АР}} & \\ \text{УХА} & \\ \underline{\text{УХА}} & \\ = & \end{array}$$

Ребусы, как правило, решаются логическими рассуждениями, нередко с использованием более или менее обширного перебора. Для приведённого «кулинарного» шедевра можно предложить, например, такой подход. Первая цифра частного – ***У***. При делении «в столбик» мы умножаем её на делитель ***ХА*** и подписываем результат под первыми цифрами делимого. Но ведь там подписано то же самое ***ХА***! Итак, при

[1] В этой статье использованы примеры из 3-го издания этой книги (Москва, ГИТТЛ, 1956).

умножении $\boldsymbol{XA}$ на $\boldsymbol{У}$ результат равен $\boldsymbol{XA}$, вследствие чего $\boldsymbol{У}=1$.

Далее мы из $\boldsymbol{МУ}$ вычитаем $\boldsymbol{XA}$, и получается *однозначное* число $\boldsymbol{К}$. Отсюда сразу становится ясно, что $\boldsymbol{X}$ ровно на 1 меньше, чем $\boldsymbol{M}$, и эта единичка из разряда десятков была «разменяна» в разряде единиц. Поэтому $(10+\boldsymbol{У})-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{К}$, а так как $\boldsymbol{У}=1$, то $11-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{К}$.

Продвигаемся дальше вниз. Из $\boldsymbol{КX}$ вычитаем $\boldsymbol{AP}$, получая $\boldsymbol{УX}$. Во-первых, отсюда следует, что $\boldsymbol{P}=0$. Во-вторых, из-за нулевого $\boldsymbol{P}$ нам при вычитании не придется «разменивать единичку» из буквы $\boldsymbol{К}$, и потому $\boldsymbol{К}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{У}$. Вспомнив теперь, что $\boldsymbol{У}=1$ и $\boldsymbol{К}=11-\boldsymbol{A}$, получаем $(11-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}=1$, и $\boldsymbol{A}=5$.

Что ж, неплохо – две цифры их трёх, входящих в состав делителя и частного, мы выявили, и теперь проблема только в $\boldsymbol{X}$. Но она разрешима без труда – ведь, как видно из примера, при умножении $\boldsymbol{XA}$ на $\boldsymbol{A}$ получается $\boldsymbol{УXA}$. А что такое, например, $\boldsymbol{XA}$? Это число, содержащее $\boldsymbol{X}$ десятков и $\boldsymbol{A}$ единиц. Поэтому $\boldsymbol{XA}=10\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$. Аналогично $\boldsymbol{УXA}=100\cdot\boldsymbol{У}+10\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$. Так что равенство $\boldsymbol{XA}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{УXA}$ можно записать так:

$$(10\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{A}=100\cdot\boldsymbol{У}+10\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}.$$

Подставив сюда $\boldsymbol{A}=5$ и $\boldsymbol{У}=1$, легко определяем $\boldsymbol{X}=2$. Окончательно: $\boldsymbol{XA}=25$, $\boldsymbol{УXA}=125$, поэтому $\boldsymbol{МУXA}=25\cdot125=3125$. Победа!

И всё-таки признаемся, что далась нам она как-то слишком легко. Причина проста: условие чересчур *избыточно*, т.е. содержит много информации, без которой, вообще-то, можно было бы обойтись. Иначе говоря, наш пример мог бы выглядеть значительно компактней, вот так:

$$\boldsymbol{МУXA}:\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{УXA},$$

и решение всё равно осталось бы единственным!

Как же решать такой «урезанный» ребус? Все приведённые выше рассуждения, очевидно, никуда не годятся – они использовали как раз промежуточные действия при делении «в столбик». Но, оказывается, имеется превосходный способ, позволяющий быстро решать такие ребусы, в которых сомножители и произведение (либо же, наоборот, делимое, делитель и частное) оканчиваются одинаковыми цифрами. Разъяснить его удобнее на других примерах, чем и займёмся.

Начнём с такого широко известного ребуса:

$$\textbf{\textit{ЛИК}}\cdot\textbf{\textit{ЛИК}}=\textbf{\textit{БУБЛИК}}.$$

Обратим внимание на его специфическое свойство: оба сомножителя оканчиваются теми же буквами, что и произведение (более того – они *полностью совпадают* с последними цифрами произведения). Сделаем «хитрый ход» – вычтем из обеих частей равенства ***ЛИК***. Получим:

$$\textbf{\textit{ЛИК}}\cdot\textbf{\textit{ЛИК}}-\textbf{\textit{ЛИК}}=\textbf{\textit{БУБЛИК}}-\textbf{\textit{ЛИК}}.$$

Это можно переписать в виде:

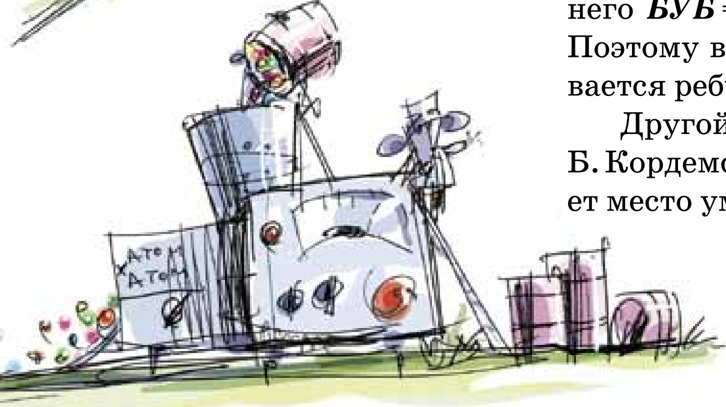
$$(\textbf{\textit{ЛИК}}-1)\cdot\textbf{\textit{ЛИК}}=\textbf{\textit{БУБ}}000=\textbf{\textit{БУБ}}\cdot 1000.$$

Итак, произведение двух *соседних* натуральных чисел (***ЛИК*** – 1) и ***ЛИК***, меньших 1000, делится на 1000. Обдумаем этот факт. 1000 – это $2^3\cdot 5^3$. Два соседних числа не могут *оба* делиться на 2 (да и на 5 тоже). Поэтому одно из них делится на $2^3=8$ (и *не делится* на 5), а второе – делится на $5^3=125$ (и *не делится* на 2). Но много ли трёхзначных чисел делятся на 125, но не делятся на 2? Всего лишь четыре: 125, 375, 625 и 875. Если проверить все соседние с ними числа, то из них делятся на 8 только два: 376 (сосед числа 375) и 624 (сосед числа 625). Это даёт нам два возможных решения:

$$1)\ 375\cdot 376=141000=141\cdot 1000;$$
$$2)\ 624\cdot 625=390000=390\cdot 1000.$$

Второй из них придётся отбросить, потому что для него ***БУБ*** = 390, т.е. ***Б*** равно и 3, и 0 одновременно. Поэтому верный ответ лишь первый, и расшифровывается ребус так: $376\cdot 376=141376$.

Другой пример такого рода приводится самим Б. Кордемским в той же 272-й задаче. На этот раз имеет место умножение:



$$\begin{array}{r}
\times\quad \textbf{\textit{A T O M}}\\
\textbf{\textit{A T O M}}\\
\hline
\,\,*\,*\,*\\
\,\,*\,*\,*\ \ \\
\,\,*\,*\,*\ \ \ \ \\
\,\,*\,*\,*\ \ \ \ \ \ \\
\hline
\,\,*\,*\,\textbf{\textit{A T O M}}
\end{array}$$

Здесь, вычитая ***АТОМ***, получаем, что (***АТОМ*** – – 1)·***АТОМ*** делится на $10000=2^4\cdot 5^4$. Ну а дальше катимся по наезженной колее. Рассмотрев все нечётные четырёхзначные числа, делящиеся на $5^4=625$ (а таковых набирается всего лишь 7 – не так-то и много), проверим делимость их соседей на $2^4=16$. В итоге останется один-единственный претендент на ***АТОМ***: число 9376. Проверяем: $9376 \cdot 9376 = 87909376$. Всё в порядке! Впрочем, не всё: надо ещё проверить, действительно ли при промежуточных перемножениях повсюду получаются строго пятизначные числа. Ну, это легче лёгкого, причём проверять можно лишь умножение 9376 на *наибольшую* и *наименьшую* цифры, т.е. на 3 и 9. Так как для них обеих произведения и впрямь пятизначны, то и для промежуточных множителей будет то же самое.

Кстати, и в этом ребусе умножение в столбик можно было заменить записью ***АТОМ · АТОМ*** = = *******АТОМ***, или даже так: ***АТОМ·АТОМ = ?АТОМ*** – «побочных» решений от этого не появилось бы.

Чтобы лучше усвоить предлагаемый метод, решите сами для разминки ещё несколько ребусов (используя описанный подход, вы с этим справитесь легко):

АХ·АХ = БАХ
БЕГ·БЕГ = ПРОБЕГ
АЖУР·АЖУР = ?АБАЖУР

Вернёмся теперь к нашим баранам, то есть, пардон, к мухе. Запишем ребус в виде:

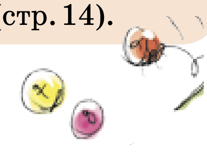
УХА·ХА = МУХА

и вычтем из обеих частей ***УХА***. После очевидных преобразований получаем: ***УХА***·(***ХА*** – 1) = ***М000***.

Вроде бы не совсем то, что мы рассматривали на примерах – сомножители не являются соседними числами! Но это не страшно – главное, что они оканчиваются *соседними цифрами*[2], поскольку делимость на 2 и на 5 определяется именно *последней* цифрой числа.

Таким образом, одно из чисел ***УХА*** и (***ХА*** – 1) делится на $5^3 = 125$ (и не делится на 2), другое делится на $2^3 = 8$ (и не делится на 5). Но (***ХА*** – 1) не может делиться на 125, поскольку это лишь двузначное число. Значит, на 125 делится ***УХА***, что порождает всё те же четыре возможности: 125, 375, 625 и 875. Для двух из них – 125 и 625 – число (***ХА*** – 1) делится на 8 (в обоих случаях оно равно 24). Осталось последнее – провести прямую проверку. Имеем: $125 \cdot 25 = 3125$; $625 \cdot 25 = 15625$. Второй вариант придётся отбросить, так как для него произведение оказалось пятизначным. Так что ответ и впрямь единственный – тот же, что и у Кордемского. Уха из мухи удалась на славу.

Ну а тем читателям, которых заинтересовали числа, оканчивающиеся при перемножении на себя такими же цифрами, можно порекомендовать обратиться к небольшой заметке В. Бахмина «Автоморфные числа» из «Кванта» № 1 за 1973 год (стр. 33), а также статье А. Жиглевича и Н. Петрова «О четырёх решениях уравнения $x^2 = x$» из «Кванта» № 11 за 1989 год (стр. 14).



[2] Здесь к соседним цифрам мы относим также 0 и 9, так что не ловите на неточностях!

Художник Сергей Чуб