НАШ КОНКУРС («Квантик» №8)

36. *Андрей с папой пошли в тир. Уговор был такой: Андрей делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право ещё на 2 выстрела. Всего Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?*

Из 25 выстрелов Андрея ровно двадцать были призовыми. Они и были получены за попадания, по два выстрела за каждое попадание. Значит, Андрей попал 20:2=10 раз.

37. *Прямоугольник ABCD разбит двумя прямыми, пересекающимися в точке X, на 4 прямоугольника (как показано на рисунке).*

а) *Докажите, что если X лежит на диагонали AC, то площади левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равны (на рисунке они закрашены).*

б) *Пусть известно, что площади левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равны. Обязательно ли тогда точка X лежит на диагонали AC?*

а) Диагональ *AC* делит прямоугольник *ABCD* на равные треугольники, их площади одинаковы. Но и белые прямоугольники эта диагональ делит на равные части. Значит, общая площадь белых частей над диагональю равна общей площади белых частей под диагональю. Но тогда и площади закрашенных частей равны.

б) Обязательно. Иначе появился бы треугольник *AXC* (см. рис. 1), и площадь под ломаной *AXC* не равнялась бы площади над ломаной *AXC*. А поскольку площадь белой части над этой ломаной по-прежнему равна площади белой части под ломаной, то и закрашенные части не могут быть одинаковой площади.

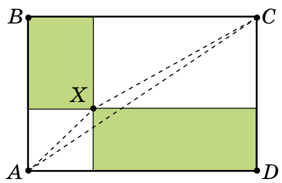

Рис. 1

38. *Кассир считает бумажные деньги так: сначала считает, сколько всего купюр (независимо от их достоинства), потом прибавляет число купюр достоинством больше рубля, затем прибавляет число купюр достоинством больше двух рублей, и так далее. Почему у него получается правильный ответ?*

Первое решение. Каждую конкретную купюру кассир подсчитает столько раз, каково её достоинство. Скажем, купюру в 10 рублей он подсчитает, когда будет учитывать общее число купюр, когда будет учитывать число купюр достоинством больше рубля, и так далее, до того раза, когда он будет учитывать число купюр достоинством больше 9 рублей – то есть ровно 10 раз. Но это и означает, что таким способом кассир найдёт общую сумму денег.

Второе решение. Будем изображать купюру в *N* рублей столбиком из *N* клеток. Расположим столбики-купюры в ряд по возрастанию. Получим что-то вроде фигуры на рисунке 2. Общее число клеток в ней и есть общая сумма денег. Кассир сначала считает общее число купюр, а это в точности число клеток в нижней строчке нашей фигуры. Затем он считает число купюр больше рубля – это число клеток во второй строчке фигуры, и так далее. В итоге кассир найдёт общее число клеток в фигуре, то есть как раз общую сумму денег.

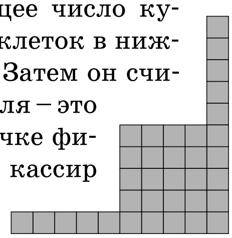
Рис. 2

39. *Обезьяна хочет определить, с какого самого низкого этажа 20-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У неё есть два одинаковых ореха. Хватит ли ей для этого шести бросков? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)*

Если бы у обезьяны был всего один орех, то она могла бы по очереди проверять этажи. Сначала она бросит кокос с первого этажа: если разбился, то первый этаж и будет искомым, если нет – бросает со второго, и так далее. Либо при броске с какого-то этажа орех разобьётся – тогда этот этаж и будет нужным. Либо обезьяна выяснит, что орехи не разбиваются при падении даже с 20-го этажа.

Вернёмся к случаю с двумя орехами. Пусть обезьяна будет по очереди бросать первый орех с 6, 11, 15, 18 и 20 этажей. Если орех разобьётся при броске с 6-го этажа, то обезьяна проверит нижние 5 этажей за 5 бросков второго ореха и найдёт ответ. Если первый орех разобьётся при броске с 11 этажа, то обезьяна проверит вторым орехом этажи с 7 по 10 (за 4 броска). Если первый орех разобьётся с 15 этажа, то она проверит этажи с 12, 13 и 14; если он разобьётся с 18 этажа, то она проверит этажи 16 и 17; наконец, если он разобьётся с 20 этажа – проверит 19 этаж. В каждом случае она найдёт ответ, и бросков хватит. Если же первый орех так и не разобьётся, то высоты в 20 этажей для него мало.

40. *Двое играют в игру на белой доске 10×10 клеток. Первый каждым ходом закрашивает чёрным цветом любые 4 белые клетки, образующие квадратик 2×2. Второй каждым ходом закрашивает чёрным цветом любые 3 белые клетки, образующие «уголок». Ходят по очереди, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?*

Ответ: второй.

Пусть после начального хода первого игрока второй закрасит уголок рядом с одним из пока свободных углов доски – как показано на рисунке 3.

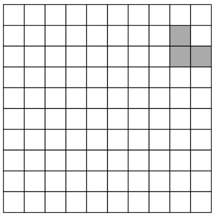

Рис.3

Прямо над закрашенным уголком есть место из трёх клеток как раз ещё для одного уголка – назовём его запасным. Ни одну из его клеток не может закрасить первый игрок. Пусть второй будет далее ходить по правилам куда угодно, не закрашивая только ни одной клетки запасного уголка. Если вдруг он не может сделать такого хода, то на доске не осталось места и для хода первого игрока. Тогда второй закрашивает запасной уголок и выигрывает.

ЗАПУТАВШИЙСЯ УДАВ («Квантик» №9)

Решение показано на рисунке 4.

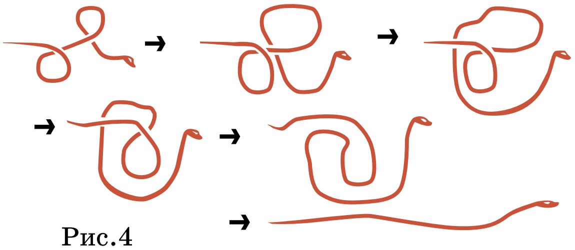

Рис.4

СКОЛЬКО СТОИТ ЧЕСТЬ КОВБОЯ

Прав, конечно, сапожник: сами сапоги стоят 15 долларов, шпоры на 10 долларов дешевле – 5 долларов. А сапоги со шпорами вместе стоят 5+15, то есть 20 долларов.

ЧЁТНОСТЬ

8, а), б). Нет, так как кузнечик умеет прыгать только на чётное число сантиметров, и поэтому расстояние от него до исходной точки всегда будет чётным.

8, в). Сможет, например, так: два раза прыгнув влево на 6 см и один раз вправо на 8 см.

9. Нет, так как в квадрате 5×5 нечётное число клеток, а сколько ни возьми доминошек, суммарно в них будет чётное число клеток.

10. Всего в выпавшем куске чётное число страниц (в два раза больше, чем листов). Номер последней страницы чётный. Значит, это одно из чисел 346, 364, 436, 634. Первые три числа не подходят – они меньше 463, номера первой страницы. Значит, номер последней – 634, а всего в куске 172 страницы.

11. Ясно, что мальчики и девочки в кругу чередуются. Значит, девочек тоже 5.

12. Можно считать, что в кучк е 111 спичек, и за ход можно брать 1 или 11 спичек: задача будет та же самая. Заметим, что тогда после хода Пети число спичек всегда будет чётным, а после хода Васи – нечётным. Поэтому, как бы ни играли игроки, Вася не выиграет: после его хода не может остаться 0 спичек. А Петя выиграет, так как спички когда-нибудь кончатся, а пока они не кончились, Петя всегда может сделать ход (например, взять одну спичку).

13. а) Пример показан на рисунке 5.

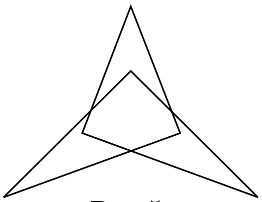

Рис.5

б) Нельзя. Допустим, что такая ломаная есть. Посчитаем, сколько на ней точек пересечения ребёр. На каждом ребре ровно одна точка пересечения, а рёбер всего 7. Получаем вроде бы 7 точек? Нет, ведь при таком подсчёте каждая точка учитывается два раза (она лежит на двух рёбрах, которые в ней пересекаются). Значит, точек в два раза меньше, то есть 3,5. Но это невозможно!

14. Оказывается, Даня не сможет выиграть, как бы ни играли ребята. Чтобы убедиться в этом, докажем: *нельзя заменить звёздочки в выражении* *1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 *на знаки* «+» *и* «–» *так, чтобы значение выражения стало чётным.*

Заменим сначала каждый знак на «+». Получим нечётное число ($1+2+\ldots+9+10=55$). Заменим теперь какой-нибудь знак «+» на «–». Как изменится значение выражения? Если мы изменили знак перед числом a, то вместо выражения $1+\ldots+a+\ldots$ получится выражение $1+\ldots-a+\ldots$, оно меньше предыдущего на $2a$. То есть значение выражения изменится на чётное число $2a$, и, значит, по-прежнему будет нечётным. Сколько раз ни заменяй «+» на «–» (или наоборот), значение выражения всегда будет изменяться на чётное число, и поэтому останется нечётным. Значит, всегда будет выигрывать Оля. (Сравните с задачей 5, б.)

15. а) Может, например, так:

$$5544+4455=9999.$$

б) Не может. Предположим противное. Так как знаков в числах поровну, они должны быть пятизначными (иначе сумма будет меньше или больше 99999). При складывании в столбик этих чисел не может происходить переноса через разряд. Ведь сумма любых двух цифр не больше 18, и, значит, складывая последние цифры чисел, мы получаем ровно 9 (переноса в следующий разряд нет). Аналогично, складывая предпоследние цифры, получаем ровно 9, и так далее. Тогда общая сумма цифр наших чисел равна $9\cdot5=45$. Но сумма цифр первого числа равна сумме цифр второго, то есть общая сумма должна быть чётной – противоречие.

16. Допустим противное – никакие два представителя одного племени не сидят рядом. Пусть все эльфы и гномы уйдут из-за стола. Тогда между любыми двумя оставшимися будет стоять ровно один пустой стул, и значит, мест за столом – чётное число. А у нас 2013 мест.

17. Назовём пятнадцатиминутное движение улитки в одну сторону ходом. Тогда ходы улитки разделяются на четыре типа, скажем: вверх, вниз, влево и вправо. Если улитка вернулась в исходную точку, то на её пути число ходов влево равно числу ходов вправо, и число ходов вверх равно числу ходов вниз. Значит, общее число ходов чётно.

Кроме того, в пути улитки горизонтальные ходы (влево и вправо) чередуются с вертикальными (вверх и вниз), и тогда число горизонтальных ходов будет равно числу вертикальных.

Но тогда количество ходов влево равно и количеству ходов вправо, и количеству ходов вверх, и количеству ходов вниз. Значит, общее число ходов улитки делится на 4. Но это и означает, что улитка вернётся в исходную точку через целое число часов.

РАЗ, ДВА, ТРИ, ..., ДЕВЯТЬ, ДЕСЯТЬ!

Наличие одинаковых звуков – не единственное условие, позволяющее нам воспринимать те или иные слова как похожие. Важную роль играет, например, количество слогов. В последовательности «Один – два – три» первое слово двусложно, а два других – односложны. Быстро произносить такую последовательность не очень удобно, поэтому при устном счете слово «один» и заменяется так часто на более короткое слово «раз»: в последовательности «Раз – два – три» все три слова односложны и, следовательно, достаточно сходны между собой.

УХА ИЗ МУХИ

Вот каковы решения предложенных ребусов:

$$25\times25=625$$
$$625\times625=390625$$
$$9376\times9376=87909376$$

Некоторые из них имеют немало общего с ребусами, рассмотренными в статье. Ничего удивительного – множество подходящих («автоморфных», как они названы в конце статьи) чисел весьма ограничено!

УСПЕТЬ ДО РАССВЕТА

- Рыбаки поймали 25 рыбок.
- После каждого боя выбывает один игрок, а в конце останется один чемпион. Значит, поединков было $37-1=36$.
- Лиза предложила выпустить из колёс часть воздуха. Тогда автобус немного просядет и осторожно проедет тоннель. Потом колёса можно снова накачать и ехать дальше.