Бумажный итератор

Игорь Акулич

Массовая замена традиционных деревянных оконных рам пластиковыми стеклопакетами неизбежно ведёт к снижению производства и продаж когда-то весьма необходимого товара – бумажной полоски для оклейки окон перед наступлением сурового зимнего периода. Не исключено, что в скором будущем такое понятие вообще исчезнет из обихода, ибо технический прогресс не остановишь. И потому вот совет читателям: пока не поздно, срочно бегите в ближайший хозяйственный магазин и приобретайте сей великолепный геометрический инструмент!

Это не оговорка. С помощью длинной и не очень широкой полоски из тонкой бумаги[1] можно не только решать многие геометрические задачи на построение, но и некоторые такие, которые с помощью «классического» набора чертёжных приспособлений (т.е. циркуля и линейки без делений) вообще неразрешимы! Мы же будем использовать её совсем необычным образом – в качестве *итератора*.

А что такое «итератор»? Это приспособление, посредством которого можно выполнять так называемые *итерации*, т.е. последовательные приближения к нужному результату[2]. Но как можно для таких целей приспособить бумажную полоску? Сейчас увидим.

Сначала изложим предысторию. Много лет назад автору этой статьи встретилось в одной из книг классика популярной математики Мартина Гарднера описание *гексафлексагона*. Увы, в те времена журнал «Квантик» ещё не выходил и не было возможности просто взять готовую развёртку[3] и склеить её в нужном месте. Ничего не оставалось, кроме как следовать указаниям Гарднера, который утверждал, что лучшим исходным материалом для этого является именно бумажная лента для оклейки окон[4], но предварительно «разделённая» с помощью перегибов на правильные треугольники (рис. 1).

Полоска, к счастью, нашлась. Теперь, если бы под рукой имелся минимальный набор чертёжных инструментов (хотя бы линейка и карандаш, ну и калькулятор не помешал бы), разбить полоску нужным

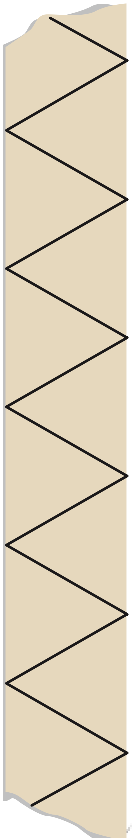


Рис. 1

[1] «Типовая» полоска для оклейки окон имеет ширину 5 см, а длина её, согласно действующим стандартам, не менее 70 см (хотя может быть и больше метра – это зависит от завода-изготовителя).

[2] Строго говоря, смысл слова «итерация» подразумевает лишь неоднократное повторение некоторой процедуры без какой-либо гарантии успеха. Но в нашем случае успех придёт!

[3] Такая развёртка имеется в «Квантике» № 4 за 2012 год.

[4] Вообще-то, М. Гарднер упоминал не ленту для оклейки окон, а ленту для чеков. – *Прим. ред.*

образом проблем бы не составило. Однако ничего подобного в обозримой окрестности не наблюдалось. Пришлось поступить следующим образом (см. рис. 2, где буквами обозначены все характерные точки). А именно: сначала я перегнул полоску по линии A_1A_2 так, чтобы угол A_2A_1M был по возможности ближе к 60°. Если бы удалось перегнуть *точно* по углу 60°, проблема была бы решена: как выполнить последующие перегибы и получить разбивку полосы на правильные треугольники – ясно каждому. Но точности ожидать не приходилось. Пришлось исхитряться и действовать так. Будем «плясать» не от острого угла A_2A_1M, а от внутреннего одностороннего с ним угла A_1A_2N. Ясно, что он тупой, и хотелось бы, чтобы он был как можно ближе к 120°. Тупой угол получить, разумеется, легко, а что касается его близости к нужной величине, то это весьма проблематично и сильно зависит от индивидуальных свойств исполнителя. Поэтому будем считать, что $\angle A_1A_2N = 120^\circ + \Delta$, где Δ – некоторая неизбежная погрешность (положительная или отрицательная). Далее перегнём полоску, чтобы совпали линии A_2N и A_2A_1, получив при этом отрезок A_2A_3. Ясно, что A_2A_3 – биссектриса угла A_1A_2N, вследствие чего $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_3A_2N = \frac{1}{2}\angle A_1A_2N = 60^\circ + \frac{\Delta}{2}$. В таком случае $\angle A_2A_3M = 180^\circ - \angle A_3A_2N = 120^\circ - \frac{\Delta}{2}$. Как видим, получился угол, который отличается от желанных 120° на вдвое меньшую величину, чем исходный угол A_1A_2N (отличается, правда, в другую сторону, но какая, в принципе, разница?). Если теперь перегнуть полоску так, чтобы совпали линии A_3M и A_3A_2 (и при этом получился отрезок A_3A_4), то новый угол A_3A_4N будет отличаться от 120° лишь на $\frac{\Delta}{4}$. Ну и так далее. Сделав несколько перегибов, мы неизбежно добьёмся того, что очередной угол будет отличаться от 120° на ничтожно малую величину, и дальше пойдут практически правильные треугольники!

Другой вопрос – сколько перегибов для этого потребуется? Если, скажем, штук пятьдесят, то длины полоски просто не хватит. Что ж, давайте оценим это значение. Знающие тригонометрию смогут

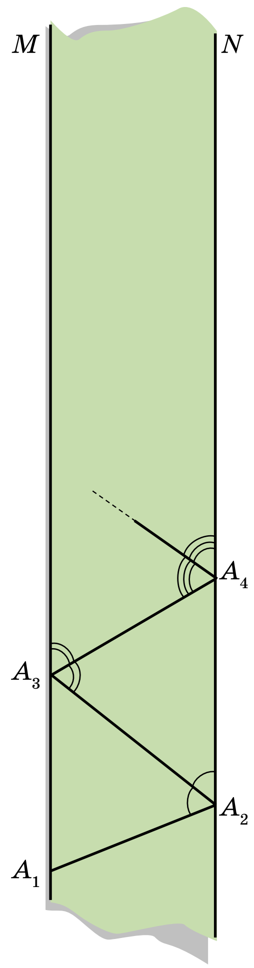


Рис. 2

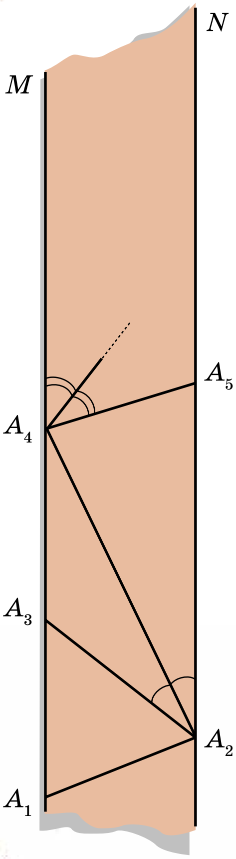
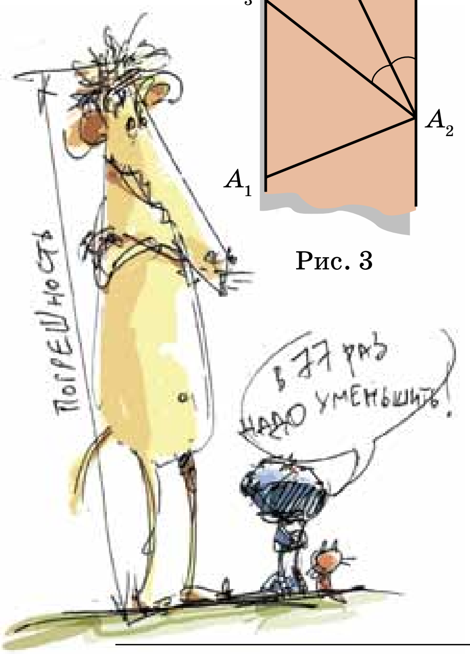


Рис. 3



выполнить вычисления легко и без проблем, мы же попробуем обойтись не столь тяжёлой артиллерией. Наша цель – «цепочка» правильных треугольников с высотой 5 см (ибо такова ширина полоски). У такого треугольника длина стороны, как известно, составляет $5 : \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5{,}77$ см. Мы же стартуем с заведомо неправильного треугольника. Какова здесь может быть погрешность? Наверняка первая же сторона первого треугольника не меньше *ширины* полоски, т.е. тех же 5 см (это если угол A_1A_2N прямой, что, конечно, сомнительно, но мы намеренно ставим себя в наихудшие начальные условия). По мере снижения отклонения получающихся углов от 120° стороны образующихся треугольников будут всё ближе подходить к нужному нам значению 5,77 см. Будем считать, что при уменьшении отклонения угла вдвое отклонение стороны также снижается примерно вдвое. Вообще-то это неверно[5], но для оценки сойдёт.

Итак, первоначальное отклонение составляет не более $5{,}77 - 5 = 0{,}77$ см. А какое отклонение можно считать *практически* нулевым? Поскольку речь идёт о перегибах полоски, естественным критерием служит её *толщина* – при перегибах она имеет существенное значение. Толщину полоски определить нетрудно, взяв стопку из полосок (бумага для оклейки окон как раз в стопках и продаётся), измерив её толщину и поделив на количество полосок. Получаем, что она близка к 0,01 см.

Следовательно, необходимо уменьшить погрешность в $0{,}77 : 0{,}01 = 77$ раз. Поскольку мы приняли, что при каждом перегибе она снижается вдвое, а $2^7 = 128 > 77$, то должно хватить лишь *семи* перегибов[6]. На полоске это займёт совсем немного места, и останется вполне достаточная длина, чтобы получить нужное количество правильных треугольников для гексафлексагона.

Вот так буквально на пустом месте мы получили нужный результат. Бумажный итератор проявил себя безупречно.

Как ни странно, именно эта идея – перегибы по биссектрисам – позволяет получить и другие углы, не толь-

[5] Такое предположение становится приближённо верным, только когда отклонение угла становится достаточно малым.

[6] Расчёт с использованием отвергнутой нами тригонометрии показывает, что хватило бы восьми перегибов – практически то же самое.

ко равные 60°. В самом деле, давайте, как и прежде, начав от произвольного тупого угла A_1A_2N, построим перегибанием его биссектрису A_2A_3, а затем – биссектрису угла A_3A_2N. Получившийся новый угол A_4A_2N будет равен лишь четверти угла A_1A_2N. Далее аналогичным образом получим четверть угла A_2A_4M и так далее (рис. 3).

Через несколько итераций процесс практически «сойдётся», т.е. получающиеся углы будут совпадать (причины тому – те же, что и в самой первой рассмотренной задаче; можете в этом убедиться сами, написав соответствующие формулы). Как бы определить их значения? Это несложно. Рассмотрим две последовательные линии сгиба PQ и QR после того, как выполнено очень много перегибов, и ситуация «стабилизировалась» (рис. 4).

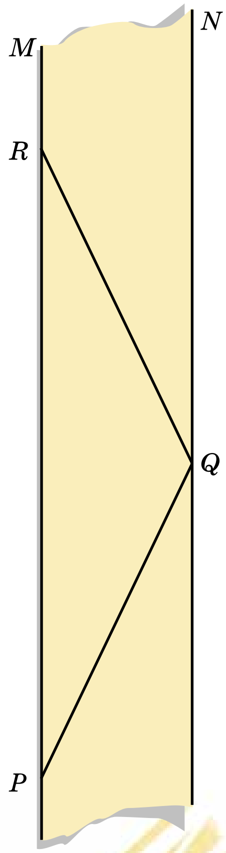


Рис. 4

Пусть $\angle PQN = \varphi$. Так как угол RQN есть четверть угла PQN, то $\angle RQN = \frac{\varphi}{4}$. Поэтому внутренний односторонний с ним угол QRM равен: $\angle QRM = 180^\circ - \angle RQN = 180^\circ - \frac{\varphi}{4}$. Но в силу «стабилизации» угол QRM равен углу PQN, т.е. тому же φ! Следовательно, $180^\circ - \frac{\varphi}{4} = \varphi$, откуда $\varphi = 144^\circ$ и $\angle RQN = 36^\circ$. Мы получили весьма примечательный угол 36°, возникающий при построении правильного пятиугольника, и притом весьма простым способом.

Можно использовать ту же идею, если (см. опять рис. 3) делить пополам не угол A_3A_2N, а угол $A_3A_2A_1$ (и так далее в том же духе), т. е. каждый новый угол составит не четверть, а три четверти предыдущего. В этом случае получаем такое «предельное» равенство: $180^\circ - \frac{3\varphi}{4} = \varphi$, и тогда $\varphi = 180^\circ \cdot \frac{4}{7}$. Как видим, здесь мы имеем дело с делением окружности на *семь* равных частей, чего «классическими» средствами получить вовсе невозможно.

Дальнейшие рассуждения существенно расширяют простор для комбинаций. Во-первых, можно делить углы не на 4, а на 8 и более частей. А можно действовать похитрей – скажем, делить углы попеременно на две и на 4 части или два раза на две, а потом один раз на четыре и так далее. То есть возможности здесь безграничны. Так что запасайтесь полосками, дорогие читатели! В крайнем случае сгодятся для оклейки окон.

Художник Сергей Чуб