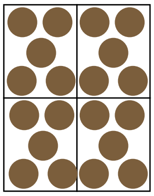
ПЕЧЕНЬЕ НА ПРОТИВНЕ («КВАНТИК» № 1, 2014 г.)

Ответ: обязательно.



Проведём мысленно на большом противне два разреза, соединив середины его противоположных сторон. Противень разделится на четыре одинаковые части вдвое меньшего размера. На каждой из них можно будет разместить 100 маленьких печений – тем же способом, как и большие печенья на исходном противне. Ведь размеры печений тоже уменьшились в два раза. В итоге на противне разместятся как раз 400 маленьких печений.

МУРАВЬИ НА ПАЛКЕ

Ответ: 100.

Как и в задаче про муравьёв, будем считать, что два шарика, столкнувшись, не отражаются друг от друга, а как бы меняются местами и едут дальше. Это не изменит общее количество столкновений. Тогда каждый шарик столкнётся с каждым из десяти шариков, которые едут ему навстречу.

ЭТОТ ЛЕВЫЙ, ПРАВЫЙ МИР

Полицейский – левша. Он держит собаку справа от себя, чтобы левая рука оставалась свободной для пистолета (кобура слева).

ПЕРЕЛОЖИТЕ СПИЧКИ

1. 8+1=9 **2.** 0+6=6

3. 7−1=6 **4.** 6−1=5

5. VI+IV=X V+IV=IX

6. 9+3−4=8 8+3−11=0

7. 311+89=400

8. 20+57=77 **9.** 2+3=5

10. 100 СТО

11. $\frac{\text{II}}{\text{VI}}$ **12.** 4

УГАДАЙ СТАНЦИЮ МЕТРО

1. «Ботанический сад».

2. «Римская». Дети на колонне – это Ромул и Рем. Подобные колонны широко использовались в архитектуре Древнего Рима.

3. «Менделеевская». Люстры напоминают молекулы, составленные из атомов, соединённых химическими связями.

4. «Чёрная речка». Так называется река, у которой был смертельно ранен А. С. Пушкин (памятник ему мы и видим на рисунке). На ответ могут также навести чёрные полосы на стенах. Река, названная по тёмному цвету воды, протекает недалеко от станции.

КАЛЕЙДОСКОП

8. Ответ: первая и последняя.

ДВА КЛЮЧА

Квантик взял один ключ. С вероятностью $1/2$ это будет именно его ключ, и ему действительно не придётся возвращаться.

УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

6 класс

1. Достаточно переставить цифры так, чтобы на 11 делилась разность R старого и нового чисел. Пусть наше число имеет вид $***a*b$, то есть третья с конца и последняя цифры – это a и b соответственно. Поменяем эти цифры местами. Тогда $R=100(a-b)+(b-a)=$ $=99(a-b)$ делится на 11.

2. Ответ: нельзя. Назовём первым цвет, в который окрашена единица. Где-то есть число n второго цвета. Тогда число $n+1$ должно быть третьего цвета, число $n+2=(n+1)+1$ – второго цвета, $n+3$ – снова третьего, и т. д. Но, с другой стороны, число $n+(n+1)=2n+1$ должно быть первого цвета. Противоречие.

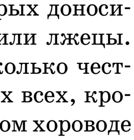
3. Ответ: не могло. Выведем всех сотрудников во двор, и пусть каждый правой рукой возьмётся за левую руку того, на кого он донёс. Так как доносов было столько же, сколько сотрудников, и ни на кого не доносили двое, все левые руки тоже окажутся заняты. Это значит, что все сотрудники разобьются на хороводы. Ясно, что выгоняли честных, на которых доносили честные, и лжецов, на которых доносили лжецы. Поэтому если несколько лжецов или несколько честных идут в хороводе подряд, то выгонят их всех, кроме одного. В результате оставшиеся в каждом хороводе сотрудники будут чередоваться (честный, лжец, честный, лжец, ...), то есть останется в каждом хороводе – а значит, и всего – чётное число людей.

4. Разобьём прямые на группы параллельных. Групп не может быть больше трёх: иначе мы взяли бы из четырёх групп по одной прямой и получили бы четвёрку прямых, противоречащую условию задачи.

Поскольку $3\cdot 2<7$, в одной из групп будет не меньше трёх прямых, что и требовалось.

5. Суммарная площадь всех прямоугольников равна 400. Суммарный периметр состоит из периметра квадрата (80) и удвоенной суммарной длины проведенных отрезков (320), то есть тоже равен 400. Осталось заметить, что если бы у всех прямоугольников периметр был меньше площади, то тогда суммарный периметр тоже оказался бы меньше суммарной площади.

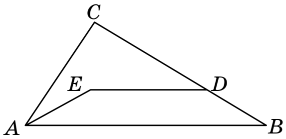
7 класс



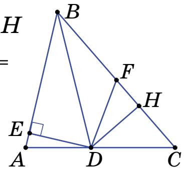
1. Ответ: может. Решение приведено на рисунке. Единственность покрытия проверяется без труда.

2. Ответ: при любом $k\geqslant 2$.

Пусть площадь треугольника равна S. Отрежем от него треугольник ABC площади $2S/k$ по прямой, параллельной одной из сторон исходного треугольника. Оставшаяся часть будет трапецией. Разделим каждое из её оснований на $k-2$ равные части и соединим соответственные точки деления отрезками: трапеция разделится на $k-2$ меньшие трапеции одинаковой площади S/k. Осталось разделить треугольник ABC на два четырёхугольника равной площади. Это можно сделать так, как показано на рисунке. Здесь $ABDE$ – трапеция, основание DE которой в два раза меньше основания AB, а высота в три раза меньше высоты треугольника ABC, опущенной на сторону AB.



3. Ответ: 60°. Опустим перпендикуляр DH на BC. Треугольники BDE и BDH равны, поэтому $2BH = 2BE = BC + FD$, откуда $BH = BF + \frac{1}{2}FD$. Учитывая, что угол DBC острый и, значит, F и H с одной стороны от B, получаем $FH = \frac{1}{2}FD$. Итак, в прямоугольном треугольнике DFH гипотенуза вдвое больше катета, откуда $\angle DFC = 60^\circ$.



4. Ответ: 16 коней. Среди 32 клеток найдутся хотя бы 16 клеток одного цвета. Кони, поставленные на эти клетки, не будут бить друг друга. Поэтому 16 коней поставить всегда можно.

Докажем, что не всегда можно поставить больше 16 коней. Отметим 32 клетки в виде прямоугольника 4×8. Его можно разбить на прямоугольники 2×4, а они разбиваются на пары клеток, «соединенных» ходом коня. Всего таких пар 16, а в каждую пару можно поставить не более одного коня. Поэтому всего можно поставить не более 16 коней.

5. Нарисуем по кругу 300 точек – они будут изображать школьников. Если два школьника знакомы, соединим соответствующие вершины отрезком. Тройке знакомых школьников будет соответствовать треугольник. По условию, треугольников больше, чем отрезков. Тогда, так как каждый треугольник состоит из трёх отрезков, найдётся отрезок, входящий хотя бы в четыре разных треугольника (подумайте, почему). Возьмём школьника из пары, соответствующей этому отрезку, – он будет знаком хотя бы ещё с четырьмя другими школьниками (кроме того, кто в этой паре).

8 класс

1. Ответ: 512. Заметим, что сумма четырёх слагаемых, каждое из которых 1 или 2, равна 4, 5, 6, 7 или 8. Нас устраивают суммы 5 и 7. Таким образом, в данном случае простота суммы равносильна её нечётности. Покажем, что если произвольным образом заполнить в таблице 4×4 единицами и двойками верхний левый квадрат 3×3 (что можно сделать $2^9 = 512$ способами), то оставшиеся клетки таблицы 4×4 при условии нечётности всех сумм по её строкам и столбцам заполняются единственным образом. Для всех клеток, кроме правой нижней, это очевидно. В правую нижнюю клетку ставим число, обеспечивающее нечётность суммы в последнем столбце. Теперь в каждом столбце суммы нечётны, значит, сумма чисел во всей таблице чётна. Так как в первых трёх строках суммы нечётны, то и в последней строке сумма автоматически будет нечётной.

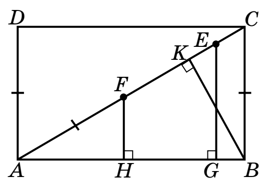
2. Ответ: может. Это числа 256 и 257. Пусть n – число, делящееся на все числа от 1 до 500, кроме каких-то k и $k+1$. Если хотя бы одно из этих двух чисел, например, k, имеет хотя бы два разных простых делителя, то его можно представить в виде произведения двух взаимно простых множителей, меньших n (и отличных от k и $k+1$). Число n будет делиться тогда на оба эти множителя, а значит, и на k тоже – противоречие. Поэтому и k, и $k+1$ должны быть простыми числами или степенями простых. Поскольку одно из чисел k и $k+1$ чётно, оно должно быть степенью двойки, причём наибольшей, не превосходящей 500, – иначе n будет делиться на более высокую степень двойки. Отсюда k или $k+1$ должно равняться 256. Вторым числом может быть 255 или 257. Но 255 – не простое и не степень простого, так что подходит только 257 – оно простое.

Осталось построить пример. Подойдёт произведение всех нечётных чисел, меньших 500, кроме 257, умноженное на 256/2.

3. а) Выигрывает второй игрок, делая ходы, симметричные ходам первого относительно центрального узла сетки.

б) Выигрывает первый игрок. Сетка представляет собой прямоугольник. Рассмотрим две стороны этого прямоугольника, на которых лежат по 2014 узлов. Пусть первый соединит 1007-й узел на первой стороне с 1008-м узлом на второй стороне (узлы нумеруем в одном и том же порядке). Тогда прямоугольник разделится на две равные части. Далее первый выиграет, делая ходы симметрично ходам второго (относительно центра сетки).

4. Опустим перпендикуляр BK на AC. Тогда $AG = AK$, как катеты равных (по гипотенузе и острому углу) прямоугольных треугольников AEG и ABK. Кроме того, $FH = CK$, как катеты равных (по гипотенузе и острому углу) прямоугольных треугольников AFH и BCK. Поэтому $AC = AK + CK = AG + FH$.



5. Заметим, что

$$\frac{2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \frac{2(a^2+b^2+c^2+d^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \frac{2}{a^2+b^2} + \frac{2}{c^2+d^2}.$$

Но $\frac{2}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{ab}$, поскольку $2ab \leqslant a^2+b^2$, так как $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$. Аналогично, $\frac{2}{c^2+d^2} \leqslant \frac{1}{cd}$, откуда следует неравенство задачи.