СМОТРИ!

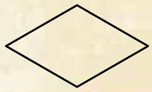
Максим Прасолов

Разрезания шестиугольника на бантики

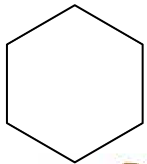
Может ли серьёзная математическая теорема походить на игру в кубики? Давайте проверим!

В формулировке любой теоремы используются математические объекты, которым необходимо дать определение. Иначе никто не поймёт, о чём вообще теорема! Итак,

Определение. Фигуру, составленную из двух одинаковых правильных треугольников, которые прилегают по стороне, назовём бантиком:



Из бантиков мы будем складывать правильные шестиугольники:



Например, так:

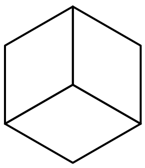


Рис. 1

Или так:

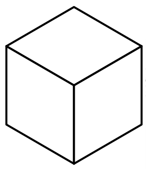
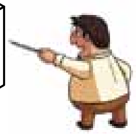


Рис. 2



Вот и представьте, что большой-большой правильный шестиугольник разбит на много одинаковых бантиков.

Определение. Пусть какие-то три бантика в разбиении правильного шестиугольника образуют маленький шестиугольник, как на рисунке 1 или 2. Будем говорить, что мы сделали *флип*, если мы поменяли расположение этих трёх бантиков внутри маленького шестиугольника, как на рисунке 3. Сделав флип, мы получаем новое, немного другое разбиение.

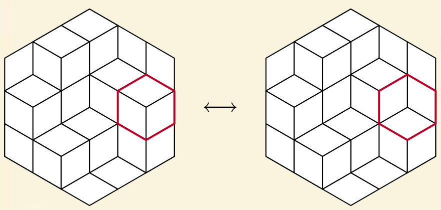
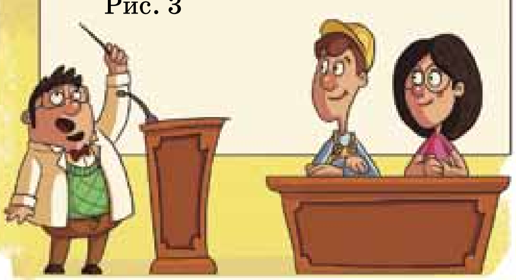


Рис. 3



Итак, у нас есть понятия *бантик* и *флип*. Теперь мы готовы сформулировать теорему:

Теорема. Пусть есть два разбиения правильного шестиугольника на равное количество одинаковых бантиков. Тогда из одного разбиения можно получить другое, сделав несколько флипов.

Разбиений бесконечно много и они могут быть очень сложными. Это делает теорему довольно устрашающей.

Тут приходит на помощь такая идея: разбиение на бантики – это комната, в которой лежат кубики (рис. 4). На рисунке 4 изображено то же самое разбиение на бантики, что и на рисунке 3 слева. Грани кубиков – это бантики.

Дальше – лучше! Уберём один кубик из комнаты (рис. 5). Что произойдёт с разбиением в этом случае? Конечно, флип! А если добавить кубик? Тоже флип.

Итак, доказательство теоремы могло бы выглядеть как-то так. Двум разбиениям из условия соответствуют два расположения кубиков в одной и той же комнате. (Количество кубиков в этих расположениях может быть не одинаковым.) По очереди будем убирать кубики первого расположения, пока не получим пустую комнату (рис. 6). Потом по одному добавим кубики второго расположения (рис. 6). При этом наше разбиение на бантики будет претерпевать флипы, и теорема доказана.

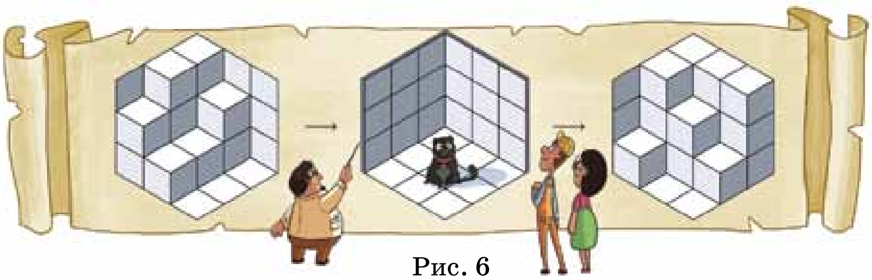


Рис. 6

Конечно, это не строгое доказательство[1]. Нужно ещё показать, что действительно каждое разбиение на бантики получается из некоторого расположения кубиков в комнате. Также кубики не могут лежать в комнате как попало – может не получиться разбиение на бантики. Например, если в комнате один кубик, он должен лежать в углу. Нарисуйте, какое разбиение на бантики получится. И выкидывать кубики из комнаты нельзя в случайном порядке. Нужно всегда вынимать «крайний» кубик, чтобы всегда получалось разбиение на бантики.

Задача. Пусть даны два разрезания правильного шестиугольника со стороной N на бантики со стороной 1. Сколько флипов максимум нужно сделать, чтобы из одного разрезания получить другое?

СМОТРИ!

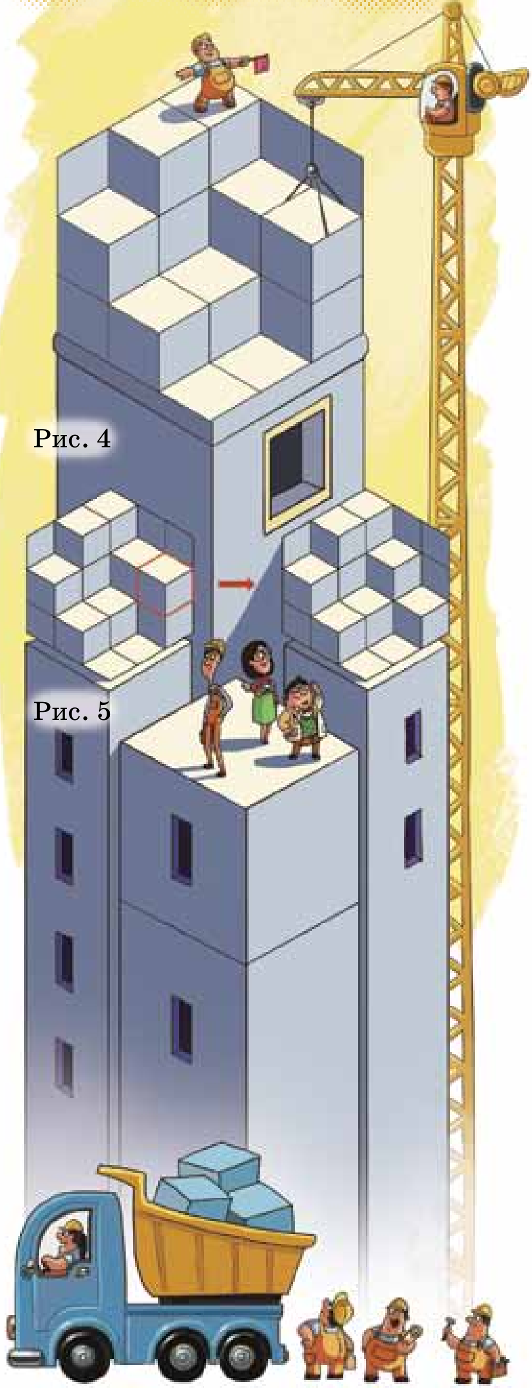


Рис. 4

Рис. 5

[1]Полное доказательство смотрите в статье Е. Карпова и К. Кохася «Разбиение на домино и функция высоты» («Квант» №6, 2010).

Художник Анна Горлач