НАШ КОНКУРС («Квантик» № 1 за 2014 год)

1. *В клетке было 7 верблюдов и работник зоопарка Вениамин. Каждый верблюд плюнул 3 раза иполучил 2 плевка от товарищей. Сколько плевков получил Вениамин? (Верблюды не промахиваются и выбирают цель для плевка только внутри клетки. Вениамин не плюётся.)*

Ответ: Всего плевков было $7 \cdot 3 = 21$, причём из них $2 \cdot 7 = 14$ получили сами верблюды. Значит, оставшиеся 7 получил Вениамин.

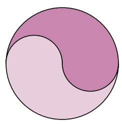
2. *Однажды я жарил оладьи. Когда я начал переворачивать одну из них, она никак не входила на старое место. Оладьи удалось вновь разместить на сковороде, лишь перевернув их все.*

а) *Докажите, что всегда можно уложить перевернутые оладьи на круглой сковороде, на которой они лежали раньше.*

б) *Приведите пример, в котором нельзя ни одну из оладий, перевернув, уложить на старое место.*

Ответы: а) Перевернём сковороду вверх дном. Оладьи начнут падать, а мы их подхватим сковородой. Они все окажутся перевёрнутыми и умещёнными на сковороде.

б) Пусть две оладьи занимают вместе сковородку целиком и имеют несимметричную форму (например, такую, как показано на рисунке). Тогда ни одну из оладий не удастся, перевернув, уместить на освободившемся месте.



3. *На физическом кружке учитель поставил такой эксперимент. Он разместил на чашечных весах 16 гирек массами 1, 2, 3, . . . , 16 граммов так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причём после выхода каждого ученика весы меняли своё положение (каждый раз перевешивала не та чаша весов, что в предыдущий раз). Какая гирька могла остаться на весах (укажите все возможности)?*

Ответ: могла остаться только гиря массой 1 г.

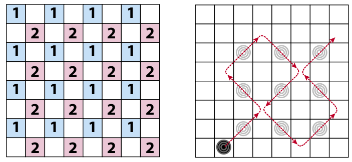
Пример привести нетрудно: пусть на левой чаше лежат гири массой 1, 3, ..., 13, 15 граммов, а на второй – гири массой 2, 4, ..., 14, 16 граммов. Тогда, забирая последовательно гири в 16, 15, 14, ..., 3, 2 грамма, ученики каждый раз будут изменять положение весов (докажите!).

Докажем, что никакая другая гиря в конце остаться не сможет.

Пусть кто-то из учеников забрал гирю массой 1 грамм. Прямо перед этим более тяжёлая чаша (А) перевешивала более лёгкую (Б) хотя бы на 1 грамм, потому что все массы гирь целые. Тогда, если забрать с чаши А гирю массой 1 грамм, она всё равно будет весить не меньше чаши Б, то есть Б не перевесит. Значит, гирю массой 1 грамм никто не снимал, поэтому именно она и должна остаться в конце.

4. *Какое наибольшее число белых шашек можно расставить на доске 8×8 так, чтобы поставленная в некоторую клетку чёрная шашка смогла побить их все за один ход?*

Ответ: 9 шашек.



Пусть для определённости шашки стоят на чёрных полях доски. Раскрасим чёрные поля в два новых цвета: 1-й и 2-й, как показано на рисунке сверху. Заметим, что шашка, побив другую, сохраняет цвет поля, на котором стоит, а значит, может бить только шашки, стоящие на полях другого цвета. Поэтому все белые шашки стоят либо на 1-м цвете, либо на 2-м (и того, и другого – по 16 полей). Также заметим, что белая шашка не может стоять на краю доски – там её никак не побить. Значит, из возможных 16 полей, где могут стоять белые шашки, исключаются ещё 7 полей на границе. То есть белых шашек не более $16 - 7 = 9$. Пример для 9 шашек изображён на рисунке сверху.

5. *Билет на проезд в общественном транспорте считается счастливым, если в его шестизначном номере сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр.*

Как-то между тремя приятелями состоялся такой разговор:

– Однажды мне попался счастливый билет, у которого каждая цифра начиная со второй была либо вдвое больше, либо вдвое меньше предыдущей, – заявил Петя.

– А мне, помню, достался счастливый билет, у которого каждая цифра начиная со второй была либо вдвое больше, либо втрое меньше предыдущей, – сообщил Коля.

– А у моего счастливого билета каждая цифра начиная со второй была либо вдвое больше, либо вчетверо меньше предыдущей, – сказал Вася.

Чьи слова могли быть правдой?

Ответ: Васины слова.

Мы считаем, что билета с номером 000000 не существует, иначе задача теряет свой интерес. Поэтому ни одна из цифр билета не должна быть равна 0.

Вася мог сказать правду, например, если у него был билет 124124.

Предположим, что Коля сказал правду: каждая цифра, начиная со второй, либо вдвое больше, либо втрое меньше.

Тогда, если первая цифра не делится на 3, то каждая следующая цифра должна быть вдвое больше предыдущей, и последняя цифра равна первой, умноженной на 32, но это явно больше 10.

Если первая цифра 3 или 6, то, идя к последней цифре (делаем 5 умножений на 2 или делений на 3), мы можем максимум один раз поделить на 3, но тогда последняя цифра будет не меньше чем $3/3 \cdot 16 = 16$, что опять же больше 10.

Если первая цифра 9, то следующая обязана равняться 3. Если третья цифра 1, то возможный билет только один: 931248, и он несчастливый. Если же третья цифра 6, то следующая только 2, а затем идут 4 и 8, но билет 936248 тоже несчастливый. Итак, Коля сказал неправду.

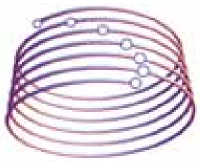
Предположим, что Петя сказал правду: каждая цифра, начиная со второй, либо вдвое больше, либо вдвое меньше. Посмотрим на остатки всех цифр при делении на 3.

Пусть первая цифра делится на 3 (то есть равна 3, 6 или 9). Таких билетов всего два: 363636, 636363, и ни один из них не счастливый.

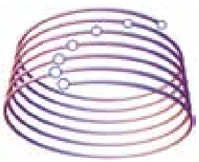
Пусть первая цифра не делится на 3, тогда и все последующие не смогут делиться на 3. Заметим, что в этом случае любые две соседних цифры дают разные остатки (1 и 2) при делении на 3 (возможных пар соседних цифр всего три: 1 и 2, 2 и 4, 4 и 8). Но тогда если сумма первых трёх цифр при делении на 3 даёт остаток $1+2+1$ (то есть 1), то вторая $2+1+2$ (то есть 2), и наоборот. Так как остатки разные, то суммы совпадать не могут, и билет заведомо несчастливый. Значит, Петя сказал неправду.

ГИРЛЯНДА («Квантик» № 2 за 2014 год)

Найдите часть дерева, где лампочки висят ровно друг над другом. Это значит, что в этом месте на обхвате дерева умещается целое число отрезков гирлянды между лампочками. Поднимемся чуть выше, где дерево тоньше. Обхват дерева уменьшился, поэтому новые лампочки окажутся не в точности над предыдущими, а чуть забегут вперёд, по направлению движения по гирлянде (см. рис.). То есть, куда вверху заворачивают вертикальные ряды ламп, туда и закручена гирлянда.



Левое дерево



Правое дерево

Будь в задаче не деревья, сужающиеся кверху, а цилиндрические столбы, лампочки бы висели симметрично, и так решить задачу было бы невозможно.

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ

1.Ответ: по часовой стрелке.

2. Ответ: оставаться в прежнем состоянии.

Для удобства будем считать, что мы оба болта проворачиваем друг вокруг друга одновременно. На ответ это не повлияет, но сделает болты равнозначными.

Посмотрим на пару болтов не в том ракурсе, как на рисунке в статье, а с противоположной стороны – тогда мы увидим, что болты проворачиваются вокруг друг друга в противоположном направлении. Действительно, если посмотреть на них с разных боков, куда направлены оси болтов, то с одной стороны мы увидим, как болты проворачиваются друг вокруг друга по часовой стрелке, а с другой – против.

Это всё означает, что неважно, в какую сторону проворачивать болты вокруг друг друга – на ответ это не повлияет. А значит, они могут только оставаться в прежнем состоянии, не отдаляясь и не приближаясь друг к другу.

РАЗРЕЗАНИЯ ШЕСТИУГОЛЬНИКА НА БАНТИКИ

Ответ: всегда хватит N^3 флипов, а меньшего количества может не хватить.

Докажем сначала, что хватит $2N^3$ флипов. Двум разрезаниям соответствуют два расположения кубиков в комнате. Так как на стороне шестиугольника умещается N сторон бантиков, то в этой комнате лежит не больше $N \cdot N \cdot N = N^3$ кубиков в каждом из расположений. Воспользуемся пояснением к рисунку 6 статьи. Возьмём первое расположение кубиков в комнате. Будем убирать кубики по одному, пока не получим пустую комнату. А потом, добавляя по одному кубику, получим второе расположение. При этом мы убрали уж точно не больше N^3 кубиков и добавили тоже не больше N^3 кубиков. Так мы получим из первого разрезания второе, сделав не больше $2N^3$ флипов.

Но почему же хватит всего N^3 флипов? Заметим, что получить из первого расположения кубиков второе можно двумя способами. Первый способ вы уже знаете: сначала убираем кубики первого расположения, а потом добавляем кубики второго. Но есть и второй способ: сначала добавляем кубики к первому расположению, чтобы заполнить всю комнату, а потом убираем лишние кубики, чтобы получить второе расположение.

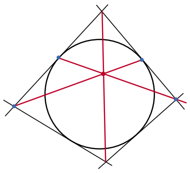
Суммарное число кубиков, которое мы переместим в этих двух способах, в точности равно $2N^3$. Почему? Так ведь в первом случае мы перемещаем столько кубиков, сколько суммарно есть в двух расположениях. А во втором способе перемещаем кубики, которых не хватает, чтобы дополнить оба расположения до полных комнат. То есть всего перемещаемых кубиков столько, сколько в двух полных комнатах – как раз $2N^3$. Но если два способа в сумме требуют $2N^3$ флипов, то хоть один из способов требует не больше половины флипов – как раз N^3.

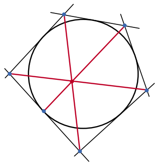
А меньшего количества может и не хватить – если, например, надо получить из пустой комнаты полную.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Если шесть точек разбить на три пары соседних и совместить точки в одной паре, то получится треугольник, в который вписана окружность. Теорема Брианшона при этом превращается в теорему Жергона: отрезки, соединяющие вершины треугольника с противоположными точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке.

Ещё две теоремы изображены на рисунках, сформулируйте их самостоятельно.





ПЕРЕПРАВЫ ОТ ШАПОВАЛОВЫХ

Для краткости будем обозначать пассажиров в лодке буквами и цифрами, переправу с исходного берега на противоположный – стрелочкой вправо: →, а переправу в обратном направлении – стрелочкой влево: ←. Такой краткой записи полезно научиться.

1. Ответ: смогут.

Сначала переправляются два человека и стиральная машина, один человек остаётся на другой стороне реки, а второй (вместе со стиральной машиной) возвращается за третьим. Затем второй и третий переправляются вместе с машиной, и все втроём выгружают машину.

2. Ответ: смогут.

Обозначим жуликов большими буквами A, B, C, а их чемоданы – маленькими. Схематически переправу можно изобразить так:

Ccc→, C ←, CAB →, AB ←, Aaa →, AC ←, ABC →, B ←, Bbb →.

Сначала C перевозит свои чемоданы, затем без багажа возвращается обратно и перевозит A и B (без багажа). После этого A и B возвращаются, и A перевозит свои чемоданы. Наконец A и C возвращаются и перевозят B, который возвращается один за своими чемоданами.

3. Обозначим членов семей первыми буквами, в одной семье большими, в другой – малыми. Вот схемы переправ:

а) Пм →, П ←, пд →, п ←, пМ →, п ←, ПД →, П ←, Пп →;

б) Пп →, П ←, ПД →, п ←, пМ →, пП ←, Пм →, П ←, пд →, п ←, Пп →.

4. Обозначим членов семей первыми буквами, умеющего грести – большой буквой, остальных – малыми. Схема переправы такая:

Мм →, М ←, Мж →, М ←, Мс →, Мм ←, Мж →, М ←, Мс →, М ←, Мм →.

5. Ответ: все 8.

Обозначим царевну буквой Ц и пронумеруем богатырей от 1 до 7 по порядку (Соня не дружит с 4-м). Схема переправы:

Ц12→, Ц1 ←, 34 →, 23 ←, Ц56 →, Ц6 ←, Ц12 →, Ц2 ←, Ц23 →, Ц5 ←, Ц56 →, Ц6 ←, Ц67 →.

6. Заметим, что под охраной двух воров баулы в безопасности. Сначала Камнев перевозит на другой берег свои баулы (например, по одному). Затем Камнев сажает в лодку Ножницына и вместе с ним по одному перевозит баулы Ножницына. Высадив Ножницына с последним баулом на другой берег, Камнев возвращается, грузит Бумагина с баулом, везёт и выгружает их на тот берег. Последующими рейсами Камнев доставляет с исходного берега на другой баулы Бумагина.

7. Ответ: при $n \geqslant 4$.

Монахинь может перевозить только жена Санчо. Рассмотрим момент, когда она перевезла первую из них. Жена Санчо должна вернуться, с монахиней на другом берегу должна быть другая женщина. Это, очевидно, жена Дон Кихота. Но тогда с оставшейся на исходном берегу монахиней должна быть ещё монахиня, то есть всего монахинь не менее трёх. Если их ровно 3, рассмотрим переправу, когда их число на другом берегу выросло с 1 до 2. В момент переправы монахиня на другом берегу была, очевидно, с женой Дон Кихота. Но тогда в момент переправы монахиня на исходном берегу оставалась без других женщин. Противоречие. Значит, монахинь не менее 4.

При 4 или более монахинях переправа возможна. Сначала Санчо перевозит Дон Кихота, и возвращается. Затем жена Санчо перевозит жену Дон Кихота, возвращается, и перевозит по одной монахинь, пока на исходном берегу не останутся только две из них. Тогда на другом берегу их тоже не менее двух. Теперь Санчо и его жена плывут на другой берег, перевозят обратно соответственно Дон Кихота и его жену, затем жена Санчо последовательно перевозит на другой берег двух монахинь, потом жену Дон Кихота, и, наконец, Санчо возвращается и перевозит на другой берег Дон Кихота.

8. Ответ: 37 задач.

Докажем, что больше 37 задач придумать не удастся. Перевозка делится на 5 получасовых периодов. В каждом периоде число придуманных задач равно числу работоспособных людей плюс число работоспособных групп. В первом периоде не менее 5 человек остаются на вокзале, в последнем – в лагере, они не работоспособны. Придумывает только группа в машине, и она даст не более 5 задач за период. Во втором периоде по-прежнему неработоспособны 5 человек на вокзале, а работоспособны не более 2 групп, поэтому придумано не более $5+2=7$ задач. Аналогично – для 4-го периода. В третьем периоде есть не более 3 работоспособных групп и даже если все люди работают, придумано не более $10+3=13$ задач. Итого – не более 37 задач.

Приведём пример для 37 задач. Председатель везёт 4 человек (5 задач), обратно везёт одного человека (4 задачи в лагере и 3 в машине), далее везёт 3 человек (группы $3+4+3$ придумывают 13 задач), везёт одного назад ($2+3$ придумывают 7 задач), и наконец, везёт 4 человека в лагерь (5 задач).

Комментарий. Эта и две следующие задачи – на достижение наилучшего результата. Но ни тут, ни там слово «наилучший» в решении не используется. В таких задачах принято разбивать решение на две внешне независимые части: оценка (доказательство того, что нельзя получить ещё лучший результат) и пример (алгоритм, способ). В примере мы просто показываем, как действовать, и результат говорит сам за себя. В оценке мы рассматриваем произвольный способ действий (а вовсе не наилучший), и доказываем для него неравенство (что он не лучше того, что в нашем примере).

9. Ответ: 33 коробки.

Пример. Обозначим братьев и грузы по первым буквам, число коробок пишем после буквы «к».
Брк5 →, р ←, Брдк3 →, р ←, Брк5 →, Б ←, к10 →, ←, к10 →.

Оценка. Всего можно перевезти 2500 кг груза. От момента погрузки рояля до момента его выгрузки фургон сделает не менее 3 рейсов туда, чтобы перевезти трёх братьев. Значит, рояль съездит «туда» не менее 3 раз. Вычитая $3\cdot 250$ кг и 100 кг дивана, получаем, что перевезено не более 1650 кг коробок, то есть, не более 33 коробок.

10. Ответ: 6 обменов.

Пример. Пусть на Сатурне были пассажиры массами 400 и 400 кг, а на Земле – два по 200 кг, два по 100 кг и четыре по 50 кг. Сделаем обмены: $400 \leftrightarrow 200+200$, $200 \leftrightarrow 100+100$, $100 \leftrightarrow 50+50$, $100 \leftrightarrow 50+50$, $200 \leftrightarrow 100+100$, $400 \leftrightarrow 200+200$.

Оценка. Если бы можно было сделать 7 операций, то число пассажиров в земной кабине возросло бы на 7. Но тогда мы либо начали с одного пассажира на Земле, либо закончили одним пассажиром на Сатурне. В обоих случаях был бы пассажир, весящий столько, сколько все остальные вместе. Его нельзя уравновесить двумя другими, значит, он в обменах не участвовал, и остался в той же кабине. Но тогда не было бы равновесия в тот момент, когда с ним вместе были другие пассажиры.

СОННАЯ ЛУНАТА

• Вкусная сарделька, в траве сидел кузнечик, барабанные перепонки, серная кислота, кот и мыши, голову помыть, лунная соната, путь Ленина, так предсказал Нострадамус.

• Нет, богатырь не ошибся. Соловей-разбойник хотел сказать:

– Фу-фу, русским духом пахнет... Ну, богатырь, держись! Пришёл твой последний час! Сейчас от тебя мокрое место останется!

СИММЕТРИЯ

Пронумеруем рисунки слева направо сверху вниз: пожарная машина, снежинка, зелёный знак, буква А...

Зеркальную симметрию имеют рисунки 1, 2, 4, 5, 7, 9, 11.

Поворотную симметрию имеют рисунки 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Если бы Иванушка просил от двух до пяти шапок, естественнее было бы ожидать ответ *две-пять шапок*, к тому же странно просить такую приблизительную цену; так что ответ не (А). Число иногда прочитывают по составляющим его цифрам (например, диктуя по телефону), но ситуация никак не подразумевала такое чтение, так что ответ не (Б) и не (Г). Если бы Иванушка хотел семь шапок (ответ (В)) и не знал слова *семь*, он сказал бы «две и пять шапок» или «пять и ещё две». Форма же «два-пять» подсказывает, что он имел в виду «два раза по пять», т.е. десять (Иван просил по пять шапок за каждого из пары коней). Царь вполне понял Ивана, ответив: «То есть это будет десять». **Ответ:** (Д).

• Счёт пятёрками был в старину в большом ходу, он опирается на число пальцев руки. Мы сейчас считаем десятками (по числу пальцев на обеих руках), т.е. используем десятеричную систему счёта; в ней названия десятков в основном устроены так же: *двадцать* «два раза по десять», *пятьдесят* «пять раз по десять».

2. Четвертак – это 25 копеек, полтинник – 50 копеек. По мнению Л. Успенского, вещь, за которую просили 50 копеек, на самом деле стоила меньше 25 копеек. Это значит, что цена на неё была завышена более чем в 2 раза. **Ответ:** (В).

3. *Полтора* – это дробное числительное (подразряд количественных числительных), а *раза* – это форма родительного падежа единственного числа существительного «раз». Именно в этой форме существительные сочетаются с числительными *полтора*, *оба*, *два*, *три*, *четыре*. **Ответ:** (А).

• На самом деле, та форма, которую мы в сочетании с числительными сейчас воспринимаем как форму родительного падежа единственного числа, по происхождению является формой именительного-винительного падежа двойственного числа, которая согласовывалась по падежу с числительным *два*. По аналогии эта форма распространилась и на сочетания с числительными *полтора*, *три*, *четыре*.

4. «Кочерга» – 7, «палочки» – 11, «Семён Семёныч» – 77, «дедушка» – 90 (самое большое число, встречающееся при игре в лото). **Ответ:** (Б).