ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Игорь Акулич

Стрелки возвращаются

Эта статья продолжает цикл статей о приключениях со стрелками (см. «Квантик» №№ 1, 6, 7 за 2012 год)

– Что-то ты, Федя, задумчив стал последнее время. Чувствую, неспроста.

– Ты прав, Даня. Всё часы не дают мне покоя. В смысле, стрелки.

– А что в них такого? Мы с тобой, кажется, кучу задач про них решили. Почитай, все секреты раскрыли.

– Боюсь, не все. Вот скажи мне, например, есть ли практическая польза от часов, у которых имеется лишь одна стрелка – часовая?

– А почему нет? Если циферблат крупный и с его помощью можно с высокой точностью определить, куда указывает часовая стрелка, то ты и время узнаешь, с ошибкой, может, минут пять, не больше. Да вот хотя бы солнечные часы – у них тоже одна стрелка...

– Согласен. А если циферблата тоже нет, и есть просто часовая стрелка – и больше ничего?

– Ты ещё спрашиваешь! Понятно, что в таком случае любому положению стрелки может соответствовать любое время. Такие часы хоть выбрось.

– Ладно. Давай перейдем к часам с двумя стрелками – часовой и минутной. История та же: часы идут абсолютно верно, но циферблат отсутствует. Можно ли определить время по таким часам?

– Дай-ка подумать... А ведь мы уже решали такую задачу! В смысле, не такую, но схожую. Помнишь, мы выясняли, сколько раз в сутки совпадают часовая и минутная стрелки? Оказалось, 22 раза, а за половину суток (то есть за полный оборот часовой стрелки) – 11 раз. И, в общем-то, та же ситуация с любым заданным углом между стрелками (если измерять их в одном и том же направлении от часовой стрелки к минутной). Этот угол принимает любое значение больше 0 и меньше 360° те же 11 раз за полусутки. Так что ответ ясен: нет!

– А заметил ли ты, что в первом случае (с одной стрелкой) любому её положению соответствует бесконечное множество значений времени, а во втором случае – конечное? Какой резкий переход!

– Похоже, ты из заочной математической школы перевелся в заочную философскую. Ясно, что две стрелки – не одна стрелка. Ну и что с того?

– А то, что столь резкое качественное изменение результата позволяет мне спрогнозировать дальнейшее развитие событий. Пусть у нас имеются все три стрелки, а циферблат по-прежнему отсутствует. Можно ли по их положению однозначно определить время? Анализируя и синтезируя предыдущие результаты, смело делаю прогноз: да!

– Смелость, конечно, города берёт, но... без доказательства как-то не очень верится.

– Вот я и хочу найти доказательство, но не могу! От того и тоска.

– Не думаю, что оно должно быть суперсложным. Может, попробуем «от противного»? Пусть однозначно определить время нельзя. Тогда есть два момента, когда взаимное положение стрелок одинаковое. А что это значит? А то, что из первого такого положения можно второе получить, повернув все стрелки на один и тот же угол. Давай его за x обозначим.

– А толку-то?

– Смотри, минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, а секундная – в 60 раз быстрее минутной. Поэтому если часовая стрелка прокрутилась на x, то минутная – на $12x$, а секундная – аж на $720x$.

– И что дальше?

– Слушай, а давай как раньше сделаем – будем всё относительно часовой стрелки вычислять. Ну, то есть будем всё время держать циферблат часовой стрелкой кверху. Тогда минутная стрелка от неё убежит на угол $11x$, а секундная – на $719x$. А в итоге и минутная, и секундная стрелки снова на свои места должны попасть! Значит, угол $11x$ – это несколько полных оборотов, скажем N, и угол $719x$ – тоже, скажем K. Тогда

$$11x = N, \qquad 719x = K.$$

– Как с этой системой быть, мы уже знаем. Опыт есть. Поделим одно уравнение на другое, избавимся от знаменателей и получим: $719N = 11K$.

– И что потом?

– И всё потом! Из последнего равенства следует, что N делится на 11. У нас N не 0 – мы же разные

моменты времени рассматриваем. Тогда N не меньше 11, то есть минутная стрелка не меньше 11 оборотов сделала относительно неподвижной часовой стрелки. А это значит, что минимум половина суток прошла. А через полсуток и так понятно, что положение стрелок повторится. Так что если мы день от ночи умеем отличать, то время не спутаешь!

– Так что же получается? Оказывается, для точно идущих часов с тремя стрелками циферблат вообще не нужен, потому что их любое возможное взаимное расположение может соответствовать только одному моменту времени. То есть глянул на часы (без циферблата!), под каким бы углом они ни располагались, и сразу по стрелкам: текущее время такое-то! Впечатляет! Или можно сконструировать такие часы (и повесить себе на стену), у которых циферблата нет, а часовая стрелка показывает всё время вверх. Никто по таким часам время не определит, а мы – запросто!

– Что-то меня сомнение гложет. «Прямая» задача – определить по текущему времени взаимное расположение стрелок (то есть углы между ними) – дело, конечно, простое. А вот обратная... ой-ёй-ёй! Не знаю даже, как и подступиться.

– Я, правда, тоже не знаю... О! Смотри! Учитель идёт! Вот кто нам поможет! Сергей Александрович! Посмотрите, пожалуйста, что у нас вышло!

Познакомившись с рассуждениями Феди и Дани, учитель сказал:

– Думаю, ребята, процентов 95 всего необходимого вы уже сделали. Я просто пойду по вашим стопам. Пусть в какой-то момент времени угол между часовой и минутной стрелками (измеряемый, как у вас, в долях от полного оборота в направлении вращения стрелок), равен $\Delta_м$ (где, очевидно, $0 \leqslant \Delta_м < 1$), а угол между часовой и секундной стрелками равен $\Delta_с$ (с теми же ограничениями). Задача сводится к тому, чтобы определить, на какой угол x (пока неизвестный) сдвинулась в этот момент от начала отсчёта (то есть числа «12») часовая стрелка. Мы уже знаем, что минутная и секундная стрелки прошли при этом пути $12x$ и $720x$, так что можем составить систему:

$$\begin{cases} 11x = \Delta_м + m, \\ 719x = \Delta_с + n, \end{cases}$$

где m и n – тоже пока неизвестные целые числа, имеющие ограничения: $0 \leqslant m < 12$ и $0 \leqslant n < 720$. А теперь поделим первое уравнение на второе, потом избавимся от знаменателей, и вот что выходит:

$$11n - 719m = 719\Delta_{м} - 11\Delta_{с}.$$

Сразу ясно, что далеко не для всех $\Delta_{м}$ и $\Delta_{с}$ (пусть даже удовлетворяющих ограничениям $0 \leqslant \Delta_{м} < 1$ и $0 \leqslant \Delta_{с} < 1$) уравнение имеет решение. По крайней мере, выражение это $Z = 719\Delta_{м} - 11\Delta_{с}$ должно быть *целым* числом.

Вас, как я понимаю, интересует вопрос: можно ли, поглядев на часы без циферблата (и определив при этом $\Delta_{м}$ и $\Delta_{с}$, а отсюда и Z), по возможности быстро решить уравнение $11n - 719m = Z$, найдя m и n, а отсюда и x, то есть текущее время.

Насчёт решить – проблем особых нет. Такие уравнения называются диофантовыми, и методика их решения давным-давно разработана. Особенно облегчает процесс то, что мы заранее знаем: для любых «реальных» $\Delta_{м}$ и $\Delta_{с}$ решение есть, и притом единственное!

А вот насчёт определения самих $\Delta_{м}$ и $\Delta_{с}$ по показаниям стрелок – как раз проблема! Обратите внимание, насколько велик коэффициент при $\Delta_{м}$ – аж 719. Это значит, что если мы при взгляде на часы ошибёмся при определении $\Delta_{м}$ хотя бы на 1/719 оборота, то это изменит величину Z, и решение уравнения станет другим. Значит, и текущее время мы определим неверно. А ведь 1/719 оборота – это примерно *полградуса*! Вы можете визуально определить угол с погрешностью менее полградуса?

– Не знаю... Полградуса – насколько это мало?

– Ну, например, наименьшее деление на обычном циферблате (то есть угол, который минутная стрелка проходит за минуту, а секундная – за секунду), составляет 6 градусов. И потому полградуса есть *двенадцатая* часть такого минимального деления.

– Тогда я сдаюсь. Такой угол определить «на глаз» я не смогу.

– И я тоже.

– Тогда, ребята, вопрос исчерпан. Не всякую красивую идею можно реализовать. Но это ещё ничего. В одном рассказе Марка Твена упоминаются часы, у которых без десяти десять часовая и минутная стрелки сцеплялись и дальше шли вместе. Вот это была проблема! Радуйтесь, что не ваша.

Художник Алие Аблямитова