## НАШ КОНКУРС («Квантик» №4)

**16.** *Начнём считать пальцы на правой руке. Первым будет большой, вторым – указательный, третьим – средний, четвёртым – безымянный, пятым – мизинец, шестым – снова безымянный, седьмым – средний, восьмым – указательный, девятым – большой, десятым – указательный, и так далее. Какой палец будет тысячным?*

Посмотрим, какие номера у нас будет получать большой палец. Сначала он будет первым, потом мы посчитаем четыре пальца от указательного до мизинца и четыре обратно (от безымянного до большого), то есть большой получит номер $1+8=9$, затем он получит номер $9+8=17$ и так далее – каждый следующий номер большого пальца будет на 8 больше. Поскольку 1000 делится на 8, то 1001-м пальцем тоже был бы большой (если бы мы считали до 1001). Значит, тысячным пальцем будет указательный.

**17.** а) *На столе лежат 3 яблока в 200 г, 300 г и 400 г. Карлсон, а затем Малыш берут по яблоку и одновременно начинают их есть (с одинаковой скоростью). Тот, кто доел своё яблоко, берёт следующее; каждый стремится съесть как можно больше. Какое яблоко должен взять Карлсон вначале?*

б) *А если имеется ещё яблоко в 450 г?*

а) Первым нужно взять яблоко весом 200 г. Тогда Карлсон доест своё яблоко первым и успеет взять ещё одно, то есть обеспечит себе не менее 500 г (а Малыш может обеспечить себе яблоко в 400 г). Если Карлсон возьмёт другое яблоко, то яблоко в 200 г возьмёт Малыш и съест больше.

б) Первым нужно взять яблоко в 300 г. Тогда Карлсон гарантирует себе 700 г, а Малышу достанется не больше 650 г. Иначе стратегией Карлсона воспользуется Малыш.

**18.** *В ряд слева направо стояли несколько столбов, между каждыми двумя соседними был натянут провод. Подул ветер, и все столбы упали влево, провода при этом не порвались и снова оказались натянутыми. Докажите, что все провода были привязаны к столбам параллельно земле.*

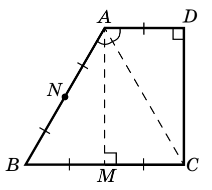
Легко понять, что если концы провода между двумя соседними столбами привязаны на одной высоте, то после падения провод не порвётся и окажется снова натянутым.

Сделаем провод не параллельным земле, сдвинув один из его концов вверх вдоль столба. Нам придётся увеличить длину провода, и высота, на которой привязан этот конец, тоже увеличится – но на другую величину (поскольку в треугольнике сумма двух сторон больше третьей). Поэтому после падения эти два увеличения не скомпенсируют друг друга.

**19.** *Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «верно ли, что этот человек – хитрец?»). Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?*

Сначала зададим всем троим вопрос, ответ на который известен (например – верно ли, что вруны всегда врут?). Если будет дано два неверных ответа, то мы узнаем, кто правдивый, а если два верных – узнаем, кто врун. Дальше можно узнать всё об остальных, задавая вопросы человеку, которого мы уже определили.

**20.** *Придумайте бумажную фигурку с таким свойством: её можно перегнуть по прямой так, что получится правильный треугольник, а можно перегнуть по прямой так, что получится прямоугольник.*

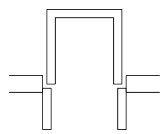



Рассмотрим фигурку $ABCD$, показанную на рисунке. В ней $ABC$ – равносторонний треугольник, а $ACD$ – половинка такого же равностороннего треугольника. Пусть $M$ и $N$ – середины сторон $BC$ и $AB$ соответственно. Ясно, что если перегнуть фигурку по линии $AM$, то получится прямоугольник $AMCD$. Если же перегнуть фигурку по линии $AC$, то половинка $ADC$ совместится с половинкой $ANC$ и получится равносторонний треугольник $ABC$.

## «НЕВЫНОСИМАЯ» МЕБЕЛЬ («Квантик» №5)

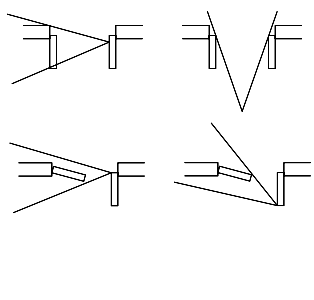
Мы приводим три предмета, которые не пролезают в открытое окно, но пролезают в прикрытое. Буквой $d$ обозначено расстояние между центрами открытых створок окна.

**1.** Буква «П»

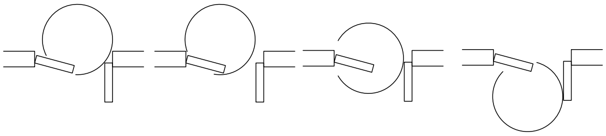


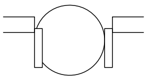
Более точно, нужно взять квадрат со стороной, равной $d$, и вырезать из него квадрат поменьше, чтобы осталась буква П, у которой толщина всех «палочек» равна толщине створок. В реальности это мог быть стол. Если его крышка большая, её пришлось бы развернуть вертикально, чтобы стол пролез через окно. И сверху этот стол как раз выглядел бы как буква П.

**2.** Фигура в виде проволоки, изогнутой под углом $40^{\circ}$ со сторонами длиной $2d-2s$, где $s$ – толщина створок.



**3.** Фигура в виде дуги градусной меры $300^0$ от окружности диаметра $d$. С помощью рисунков убедитесь в том, что эта фигура подходит!





Кстати, даже если закрыть одну створку полностью, фигуры 2 и 3 всё равно пролезут. Смотрите также решения этой задачи в мультиках на нашем сайте!

## РОБОТ В ЛАБИРИНТЕ

**2.** В этой задаче нужно перебирать не только варианты начального положения робота, но и варианты лабиринтов! Давайте посчитаем число лабиринтов размера $100 \times 100$. Лабиринт определяется набором стен и положением выхода. Между любыми двумя клетками может стоять или не стоять стена – два варианта. Да ещё у выхода 400 вариантов – любой из отрезков на границе квадрата. Получается, что всего существует $400 \cdot 2^{2\cdot 99\cdot 100}$ лабиринтов размера $100 \times 100$.

Теперь будем перебирать эти варианты подобно тому, как мы перебирали начальные положения робота. Для каждого лабиринта будем применять алгоритм из статьи. Когда мы дойдём до того лабиринта, в котором заключён робот, наши команды выведут его оттуда.

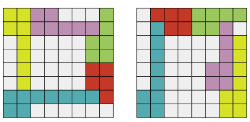
Отметим, что мы рассматриваем только те начальные положения робота, из которых в принципе возможно добраться до выхода.

Если неизвестен размер, то будем перебирать сначала лабиринты размера $1 \times 1$, потом $2 \times 2$ и так далее.

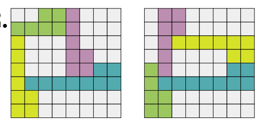
## СТОП-ГОЛОВОЛОМКА

В задачах 1 – 4 приводим по два из множества возможных решений.

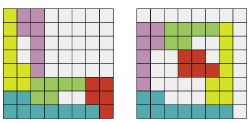
**1.**



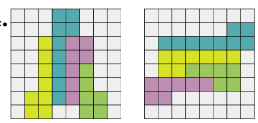
**2.**



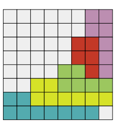
**3.**



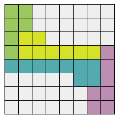
**4.**



**5.**



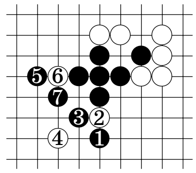
Элементы 5, 6, 7, 8, 9.
Антислайд, зеркально-симметричная фигура. Ось симметрии проходит по диагонали квадратного поля.



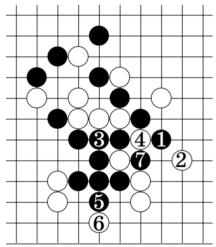
Элементы 6, 7, 8, 9.
Антислайд, центрально-симметричная фигура. Центр симметрии – точка в центре поля.

## РЭНДЗЮ: АТАКА ЧЁРНЫМИ

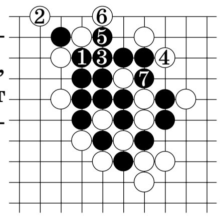
**1.** В решениях к задачам 1 – 5 показано, как чёрные могут получить открытую четвёрку. Если белые играют не в те пункты, которые указаны на диаграмме, то чёрные выиграют раньше.



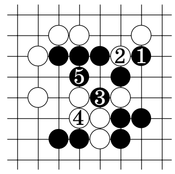
**2.** Вот кратчайшее решение:



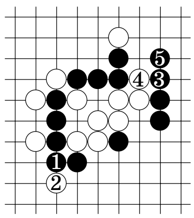
**3.** *Комментарий:* если чёрные 3-м ходом пойдут в пункт 4, а не 3, то белые ответят в пункт 3 – и тогда чёрным придётся закрывать четвёрку белых.



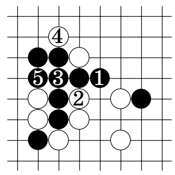
**4.** *Комментарий*: чёрные не могут первым ходом пойти в пункт 3, так как это фол $3\times 3$, но после хода 1 это уже вилка $4\times 3$.



**5.** *Комментарий:* нельзя чёрным ходить 1-м или 3-м ходом в пункт 4, так как белые закрывают четвёрку своей четвёркой, после чего выигрывают, а так возникающая четвёрка белых закрывается в свою очередь открытой четвёркой чёрных.

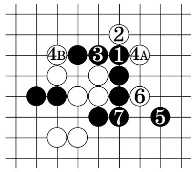


**6.** *Комментарий:* если бы чёрные 1-м ходом пошли в пункт 2, а белые 2-м ходом – в пункт 1, то на четвёртом ходу у белых возникла бы диагональная четвёрка, и они бы выиграли; кроме того, нельзя чёрным 1-м ходом ходить в пункт 3, так как после этого в пункте 1 у чёрных фол $3\times 3$.



**7.** Решение этой задачи будет опубликовано позже.

**8.** *Комментарий:* не важно, как именно белые закроют тройку на 4-м ходу, и как – на 6-м: ходы чёрных, ведущие к выигрышу, не изменятся; если белые 2-м ходом пойдут в 7, то 3-м ходом чёрные ответят в 3, а 5-м ходом в пункт 2 сделают победную вилку 4×3; обратите внимание: ходы чёрных могут зависеть от того, какие закрытия делают белые (например, на 2-м ходу).

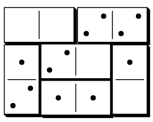



## XXV МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

### 6 класс

**1.** Пусть Аня отдала половину грибов Вите. Теперь у всех ребят поровну грибов (это означает, что у Вити своих грибов не было). Чтобы Саша теперь получил все Анины грибы, ему надо забрать грибы у Вити и Ани. У него тогда будут грибы трёх ребят – Вити, Ани и его собственные. Ещё столько же будет у остальных, значит, с Витей, Аней и Сашей в лес ходило ещё трое детей.

**2.** Одно из возможных решений приведено на рисунке.

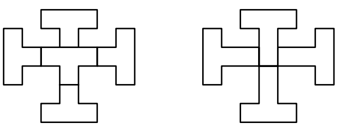


**3. Ответ.** а) 25; б) 9.

а) Все одуванчики, которые позавчера были желтыми, стали белыми вчера или сегодня. Поэтому их было $14+11=25$.

б) Из вчерашних желтых одуванчиков 11 побелели сегодня, а остальные $20-11=9$ побелеют завтра.

4. Одна из возможных фигур показана на рисунке.



**5.** Понятно, что одно надкусывание не гарантирует результа. Например, если Маша попробовала пирожок с капустой, то она не знает, какой именно из трёх ей достался, а поэтому не может с уверенностью найти пирожок с вишней. Покажем, как Маше справиться с задачей за два надкусывания.

Пусть Маша надкусила пирожок, а он оказался не с вишней, а с капустой. Тогда она может попробовать пирожок, лежащий через один от него по часовой стрелке. Если это пирожок с вишней, то Маша добилась своего, если с рисом, то искомый пирожок между надкусанными, а если снова с капустой, то пирожок с вишней будет следующим по часовой стрелке.

Если первый пирожок будет с рисом, Маша может действовать аналогично, но двигаться против часовой стрелки.

**6. Ответ.** Поезд № 392, вагон № 2.

В равенстве из самой длинной телеграммы слева и справа в двух последних разрядах написано одно и то же: ЕТ – ОЙ. Это значит, что и в старших разрядах слева и справа будет одно и то же:

$$\text{СЕКР} - \text{ОТКР} = \text{ОТВ} - \text{ТВ}.$$

Если выполнить вычитания, то и справа и слева сократятся по две буквы, то есть на концах будет по два нуля. Сократив на 100, получим:

$$\text{СЕ} - \text{ОТ} = \text{О}.$$

Теперь посмотрим на последнюю телеграмму. Если записать её как пример на сложение в столбик,

$$\begin{array}{r} \text{О Т К Р Ы Т} \\ +\quad 2\,0\,0\,1\,0 \\ \hline \text{С Е К Р Е Т} \end{array}$$

то видно, что $\text{ОТ}+2=\text{СЕ}$. Сопоставив это с предыдущим равенством, мы понимаем, что $\text{О}=2$, а тогда $\text{С}=3$. Кроме того, при сложении произошел перенос из разряда единиц в разряд десятков, а поэтому $\text{Т}=8$ или $\text{Т}=9$. Однако, если предположить, что $\text{Т}=8$, то $\text{Е}=0$, а тогда при сложении $\text{Ы}+1=\text{Е}$ (то есть $\text{Ы}+1=0$) неизбежно произошел бы перенос в следующий разряд. Но этого не было, значит, $\text{Т}=9$.

Мы узнали значения всех нужных букв.

### 7 класс

**2.** В треугольнике $ABC$ углы $A$ и $C$ равны (как соответствующие углы равных бумажных треугольников); значит, его стороны $AB$ и $BC$ равны. Но и его стороны $AB$ и $AC$ равны (как соответствующие стороны равных бумажных треугольников); значит, треугольник $ABC$ равносторонний.

**3.** 1 8 3 + 1 8 3 9 − 8 = 2014
М А Т Е М А Т И К А

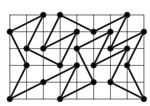
**4. Ответ:** 6.

Распустившийся одуванчик бывает белым на четвёртый и пятый день. Значит, в субботу будут белыми те одуванчики, которые распустились во вторник или среду. Определим, сколько их.

14 одуванчиков, которые были белыми в понедельник, к среде облетели, а 20 жёлтых заведомо дожили до среды (быть может, став белыми).

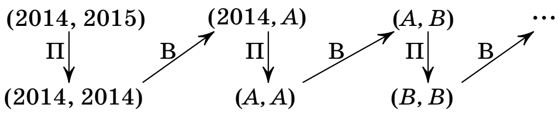
В среду на поляне было $15+11=26$ одуванчиков. 20 из них были на поляне еще в понедельник, а остальные $26-20=6$ как раз распустились во вторник и среду.

**5.** Наиболее длинный известный жюри замкнутый путь (24 диагонали) изображён на рисунке.



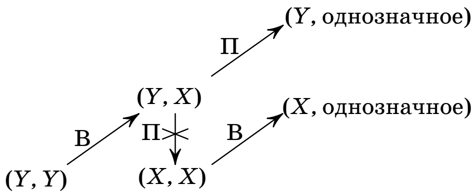
**6. Ответ.** Может выиграть Петя.

Пускай Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял):




Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет.

Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив одно из двух чисел $X$ на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, одно из двух чисел $X$ на доске уже было. В этот момент Петя может заменить $X$ на однозначное число и выиграть. (Петя может так пойти, потому что у него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном ходе: делить число X пополам, если оно чётное, и вычитать из него его же цифру.)




Итак, сформулируем стратегию Пети полностью: «если одно из чисел можно заменить на однозначное – сделать это; в противном случае уравнять два числа».

## ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

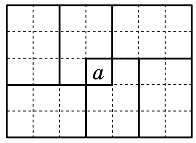
**1. Ответ.** Увеличится на 200.

Проверьте, что $(a+2)^2-(a+1)^2=(a+1)^2-a^2+2$. Поэтому второе изменение на $2 \cdot 100$ больше первого.

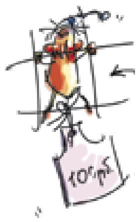
**2.** Если первый надкушенный пирожок окажется с мясом, то вкусный пирожок находится в группе следующих по кругу семи пирожков, если же с капустой, то в группе предыдущих. В любом случае в этой группе пирожки идут в порядке мясо-вишня-капуста. Оле нужно надкусить центральный пирожок в этой группе. Если он с мясом, то вкусный пирожок находится в тройке следующих пирожков, если с капустой, то в тройке предыдущих. Надкусив центральный пирожок в этой тройке, Оля таким же образом узнает, какой из пирожков вкусный. Значит, если за три надкусывания Оле не попался вкусный пирожок, то в четвёртый раз она уже точно может съесть его.

**3. Ответ.** 100 рублей.

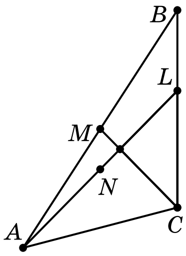
Пусть в центральной клетке таблицы написано число $a$. Тогда сумма $S$ всех чисел таблицы равна $-a$, поскольку сумму $S + a$ можно разбить на шесть нулевых сумм по шесть слагаемых так, как показано на рисунке. Следовательно, достаточно узнать одно число – центральное.




С другой стороны, таблица, заполненная числами $a$ и $-a$ в шахматном порядке, удовлетворяет условию задачи. Значит, сумма $S=-a$ может быть любой, и хотя бы одно число узнать нужно.



**4.** Пусть $N$ – середина отрезка $AL$. Тогда $MN$ – средняя линия треугольника $BAL$. Поэтому $LMNC$ – трапеция (или параллелограмм) с равными диагоналями, то есть равнобедренная трапеция (или прямоугольник). Один из углов между ее диагоналями $LN$ и $CM$ в два раза больше угла $NLC$, то есть равен 90°.




**5. Ответ.** Смогут.

За пять рейсов можно переправить *основную четвёрку* (Али-Бабу и первых трёх разбойников): сначала переправляются Али-Баба и первые два разбойника, затем 1-й и 2-й возвращаются, переправляются 2-й и 3-й разбойники, и наконец Али-Баба со 2-м возвращаются и забирают 1-го.

После этого 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 39-й и 40-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются. Итак, за 8 рейсов переправились последние два разбойника. За следующие 8 рейсов аналогично переправляются 37-й и 38-й, и т.д.

Когда на исходном берегу останутся Али-Баба и первые 4 разбойника, снова переправляется основная четвёрка, 2-й и 3-й возвращаются, переправляются 3-й и 4-й, и Али-Баба с 1-м возвращаются за 2-м.