Игорь Акулич

ФОКУС-ПОКУС

Перед вами – типичный диалог любителя математики (*Л.М.*) с человеком, далеким от математики (*Д.М.*):

Л.М. Сейчас я покажу тебе математический фокус.

Д.М. (*робко*) Может, лучше не надо?

Л.М. Ещё чего! Зря я, что ли, готовился? Итак, задумай число.

Д.М. Задумал.

Л.М. Прибавь три.

Д.М. Прибавил.

Л.М. Сколько получилось?

Д.М. Восемь.

Л.М. Ты задумал... пять!

Д.М. Верно! А как ты догадался?

Л.М. Маги тайн не выдают. Лучше покажу другой фокус – ещё круче. Задумай число.

Д.М. Задумал.

Л.М. Прибавь три.

Д.М. Прибавил.

Л.М. Отними задуманное число.

Д.М. Отнял.

Л.М. У тебя получилось... три!

Д.М. И правда три. Просто фантастика!..

Ну и так далее. Несмотря на некую утрированность, в приведённом разговоре отображены два основных типа фокусов, связанных с загадыванием числа. В первом из них над этим неизвестным числом приходится проделывать указанные факиром действия, после чего сообщить результат – и фокусник моментально определяет, что было задумано. В другом над числом также проделываются некие операции, но в их процессе оно незаметно «выбрасывается», так что дальнейшие значения от него уже не зависят, и чародей может свести ответ к любому числу, которое захочет.

Тем более удивительна третья разновидность фокусов, которая встречается значительно реже. Там фокусник также требует выполнить необходимые операции и в конечном итоге определяет задуманное число, но при этом *ничего не спрашивает*. Но как же он в таком случае добивается своего? Для примера давайте-ка представим, что *Д.М.* – это мы сами, и эксперимент проводится над нами. Вот какой выходит диалог:

Л.М. Задумай целое число от 1 до 10 (*здесь уже приходится вводить ограничения*).

Д.М. Задумал (*оказавшись на месте подопытного кролика, мы, не мудрствуя лукаво, загадываем то же самое число* 5).

Л.М. Подели на 2.

Д.М. Не делится!

Л.М. Досадно. Тогда знаешь что, сначала отними 1, а потом дели.

Д.М. Готово (*при этом мы получили, очевидно,* 2).

Л.М. Подели ещё раз на 2.

Л.М. Теперь поделилось (*и получилось* 1).

Л.М. Отними 1.

Д.М. Отнял (*в результате дошли до* 0).

Л.М. Опять отними 1.

Д.М. Не отнимается!

Л.М. Ладно, хватит. Ты задумал 5.

Вот здесь впору и впрямь задать вопрос: «А как ты догадался?». В самом деле, проанализировав текст беседы, мы убеждаемся, что фокусник действительно ни разу не спросил у испытуемого, сколько у него получилось, – и тем не менее верно определил задуманное число.

Разгадка в данном случае заключается в том, что человек, которому показывают фокус, должен быть и в самом деле *далёк от математики*. А для таких людей (их, заметим, большинство!) нечётное число *нельзя делить* на 2, потому что оно не делится. И отнимать большее число от меньшего тоже нельзя – *не отнимается*! Об этом он не преминет сообщить фокуснику *сам*, без каких-либо наводящих вопросов. И как раз эта информация позволяет найти задуманное число.

Сразу отметим, что ограничения на задуманное число (от 1 до 10) не обязательны и введены лишь для того, чтобы чрезмерно не затягивать время. Вообще-то фокус пригоден для любого натурального числа, да и для нуля тоже.

Вот последовательность действий фокусника в общем случае. Задуманное число, несомненно, либо делится на 4, либо при делении даёт остаток от 1 до 3. Иными словами, оно имеет вид $4n+\Delta$, где n – целое неотрицательное, а Δ может принимать значения 0, 1, 2 или 3. В свою очередь, само Δ либо делится на 2 (при делении получится 0 или 1), либо при делении дает остаток 1. Поэтому Δ можно представить в виде: $\Delta=2p+q$, где $p=0$ или 1, и также $q=0$ или 1. Итак, задуманное число является суммой аж *трёх* слагаемых: $4n+2p+q$, и два из них (последние) имеют весьма ограниченный набор значений.

Задача же фокусника сводится к тому, чтобы, используя непроизвольные «подсказки» испытуемого, определить эти самые n, p и q.

Начинает он с q, предлагая поделить число на 2. Если поделилось (то есть испытуемый выполнил действие без

проблем), значит, $q=0$ и при делении получится $2n+p$. В противном случае, если поступил ответ «не делится!» и, следовательно, $q=1$, предлагается сначала отнять 1, а уж потом поделить на 2. Но тогда (убедитесь!) при выполнении указанных действий получится всё то же $2n+p$.

Таким образом, фокусник знает уже значение q, и ему надо найти $2n+p$. Он делает ту же операцию: предлагает поделить число на 2. Если поделилось, то $p=0$, и при делении получится просто n. Иначе (если не делится) $p=1$, и потому предлагается сначала отнять 1, а уж потом поделить на 2. В итоге приходим к тому же n.

Задача, как видим, упростилась донельзя: известны p и q, и надо найти n. Для этого фокусник применяет «лобовой» приём: требует отнимать единицу, пока не услышит «не отнимается». Очевидно, сколько раз удалось вычесть, таково и значение n.

Таким образом, вся необходимая информация для определения задуманного числа имеется, и поступила она на добровольной основе, без всякого давления.

Разумеется, фокусник не держит в памяти формулу $4n+2p+q$. Он пользуется следующим нехитрым приёмом: мысленно «стартует» от *текущего значения* 0, и если при первом делении услышал «не делится», то добавляет к текущему значению 1, а если не делится при втором делении – то добавляет 2. Далее после каждого удачного вычитания единицы добавляет к текущему значению ещё по 4. Легко видеть, что это приведёт к тому же итогу. Скажем, для задуманной пятёрки (как это было в нашем примере) первое же деление «не получилось», и текущее значение увеличилось на 1. Второе деление прошло гладко, так что здесь прибавлять ничего не потребовалось. Наконец, один раз удалось вычесть единицу, так что добавим ещё 4. Итого $1+4=5$, что и было задумано.

Знаменитый популяризатор математики М. Гарднер (1914–2010) из эстетических соображений несколько усложнил формулировку описанного фокуса. А именно: перед каждым делением на 2 предлагает умножать на 3, а в самом конце вычитать не по 1, а по 9 (подсчёт *текущего значения* производится по тем же правилам, что и ранее). Понятно, что такой фокус аналогичен исходному, но чтобы получаемые в процессе числа выглядели более «случайными», Гарднер предлагает, когда число не делится на 2, не *вычитать* из него единицу, а *прибавлять*. Как ни странно, такое видоизменение ничуть не искажает результат. А вот почему – разберитесь самостоятельно.


Художник Анастасия Мошина