НАШ КОНКУРС («Квантик» №6)

26. *Маша покупала булочку ценой в целое число рублей. Ровно она заплатить не смогла и дала как можно меньшую сумму, но чтобы на булочку хватило. В итоге она дала продавщице 9 рублей и получила сдачу. Сколько стоила булочка?*

Раз булочка стоит целое число рублей, то её цена – 8 рублей или меньше. Маша не могла дать продавщице ни одной монеты достоинством 1 рубль или меньше – такую монету можно было бы оставить у себя, и на булочку всё равно хватило бы. Значит, Маша дала несколько монет достоинством 2 или 5 рублей. Но из них можно набрать 9 рублей ровно одним способом: $2+2+5$. Тогда булочка стоила 8 рублей (если бы она стоила меньше, то и Маша дала бы $2+5=7$ рублей или меньше, а не 9).

27. *Окна в старых вагонах метро имеют форму, изображённую на рисунке справа. Закругления верхних углов рамы и стёкла сделаны в виде дуги окружности. Окно приоткрыли, сдвинув стекло на 10 см. Высота подвижной части окна равна 25 см. Чему равна площадь открытой части окна?*

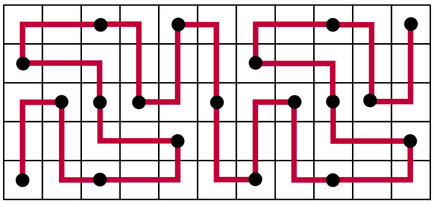
Ответ: 250 см^2.

Когда окно открыли, сдвинув на 10 см, в середине образовался прямоугольник размерами 10 см $\times$ 25 см (там, где стекло получилось в два слоя). Закроем окно: дырка исчезнет, а стекло везде будет в один слой. Значит, на дырку приходится ровно столько стекла, сколько его лишнего при открытом окне, то есть 250 см^2.

28. *Шахматный конь захромал, и, делая обычный ход буквой Г, наступает на каждую клетку, входящую в эту букву (например, делая ход с a1 на b3, он наступает ещё и на клетки a2, a3, либо на b1, b2). Может ли хромой конь обойти поле 5×11 так, чтобы наступить на каждую клетку ровно один раз?*

Ответ: может.

Один из возможных примеров обхода приведён на рисунке.



29. *Квантик попал на остров, населённый двумя племенами. Представители одного племени всегда говорят правду, представители другого – всегда лгут. Квантик подошёл к развилке дороги, и ему пришлось спросить у оказавшегося поблизости местного жителя, какая из двух дорог ведёт в деревню. Ему неизвестно, с представителем какого племени он разговаривает. Как, задав всего один вопрос, точно узнать, по какой дороге надо идти?*

Пусть Квантик выберет одну из дорог и будет спрашивать про неё. Если он просто задаст вопрос «Ведёт ли эта дорога в деревню?», то ответы честного и лжеца будут разными, и мы ничего не узнаем. Пусть Квантик задаст более хитрый вопрос: «Что ты ответишь, если я спрошу тебя, ведёт ли эта дорога в деревню?». Если дорога и вправду ведёт в деревню, рыцарь ответит «да», но и лжец – тоже «да» (ведь на вопрос «Ведёт ли эта дорога в деревню» он бы ответил «нет»). А если дорога не ведёт в деревню, то честный ответит «нет», но и лжец ответит «нет» (потому что на вопрос «Ведёт ли эта дорога в деревню» он бы ответил «да»).

Так Квантик точно узнает, по какой дороге надо идти – если ответ «да», то по выбранной, а если ответ «нет», то по другой.

30. *На старой печатной машинке Незнайки на печать каждой конкретной цифры всегда расходуется одно и то же количество чернил. Незнайка говорит, что на этой машинке нельзя напечатать два натуральных числа, одно в 9 раз больше другого, истратив на каждое число одно и то же количество чернил. Не ошибается ли он?*

Незнайка заведомо ошибается. Рассмотрим два числа 1089 и $9801 = 1089 \cdot 9$. Они состоят из одних и тех же цифр, поэтому чернил на них тратится поровну.

ДВА КОНВЕРТА («Квантик» №7)

Майкрофт вскрыл любой из конвертов и сразу съел записку (тут-то и пригодился стакан воды). Единственный способ проверить, что там было написано – посмотреть в другой конверт. Там точно окажется записка «ухожу» (из-за подмены). Но по правилам, записки должны быть разными, и раз осталась записка «ухожу», то министру придётся признать, что съеденной была записка «остаюсь».

МЫЛЬНЫЕ ПУЗЫРИ И ХОРДЫ

На фото в статье можно заметить, что плёнка, разделяющая соседние пузыри, выгнута в сторону большего из них. Значит, давление в маленьком пузыре больше.

Более того, можно показать, что в каждой точке, где сходятся три мыльные плёнки (в нашем случае – два пузыря и плёнка между ними), они подходят друг к другу под равными углами 120°. Зная это, можно вычислить, насколько и в какую сторону выгнута плёнка между пузырями.

ОНОРЕ ДЕ БАЛЬЗАК, УОЛТ ДИСНЕЙ, МАРК ТВЕН

История про Диснея – выдумка, так как фразу «Иди с ней!» он говорил бы наверняка не по-русски, а по-английски.

ЛАМПОЧКИ

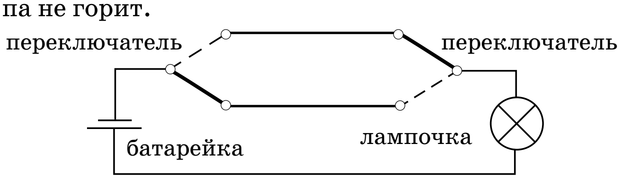
1. Пронумеруем выключатели, а потом щёлкнем каждым по разу в порядке номеров. Тому, кто за лампочками наблюдает, остаётся только записывать и подклеивать к лампочкам номера.

2. Пронумеруем выключатели, а потом щёлкнем каждым выключателем столько раз, какой его номер. Тому, кто за лампочкой наблюдает, остаётся только подсчитать, сколько раз лампочка моргнёт.

3. Пронумеруем выключатели. Выключатель №1 включаем, выключатель №3 оставляем выключенным. Выключатель №2 включаем, ждём пару минут, выключаем и сразу идём в комнату с лампочками. Там одна лампочка будет гореть, она соответствует выключателю №1. Одна из несветящихся лампочек будет тёплой, она соответствует выключателю №2. И, наконец, холодная лампочка будет соответствовать выключателю №3.

4. Идея решения состоит в том, чтобы вместо выключателя использовать переключатель. В отличие от выключателя, который соединяет или разъединяет два конца в цепи, переключатель соединяет один конец с одним из двух других, в зависимости от своего положения.

Одна из возможных схем приведена на рисунке. При таком положении переключателей лампа не горит.



ДЕВОЧКА С ГОЛУБЫМИ ВОЛОСАМИ

- Если надутый воздухом шарик отпустить, он опустится вниз. Чтобы шарик полетел вверх, его надо накачать лёгким газом, например, водородом или гелием.
- Искомый пин-код: 1236.
- Буратино просто не может утонуть, он деревянный.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КОНКУРСА «КЕНГУРУ»

1. Ответ: В.

Между днями рождения самой старшей из девочек (Анны) и самой младшей (Селины) проходит $5+6=11$ месяцев, причём эти дни рождения приходятся на один и тот же год. Значит, Анна родилась в январе, а Селина – в декабре. А раз Бетти родилась через 5 месяцев после Анны, то у неё день рождения в июне.

2. Ответ: А.

Заметим, что домик Феди можно мысленно разделить на центральный кубик и три тройки кубиков, в каждой из которых любые два кубика соприкасаются. По условию, в каждой такой тройке не больше одного красного кубика, а у Феди всего четыре красных кубика. Значит, центральный кубик красный. Придумайте сами, каким именно мог быть дом Феди.

3. Ответ: Б.

Полоски лучше считать с конца: последней явно упала полоска номер 6 (она ничем не закрыта, а остальные полоски закрыты), перед ней упала полоска с номером 4 (она закрыта только 6-й полоской), перед 4-й полоской упала полоска номер 7, а перед ней – полоска с номером 3. Это и есть искомая полоска (она упала четвёртой и с конца, и с начала).

4. Ответ: Б.

Во-первых, ясно, что складывая два двузначных числа, нельзя получить число, больше, чем $99+99=198$. Поэтому буква У обозначает цифру 1. Значит, сумма цифр Е и Г оканчивается на 1, поэтому эта сумма равна 11. Поэтому Е и Г – это либо 7 и 4, либо 5 и 6. Сумма цифр К и Н тоже не меньше 10 (так как есть перенос), и при этом она не равна 10, так как в этом случае мы бы получили, что Р = 1. Следовательно, цифры К и Н – это тоже либо 7 и 4, либо 5 и 6. В любом случае получается, что Р = 2 и значит, цифра 3 не использована.

5. Ответ: Д.

Будем сворачивать кубик так, чтобы левая клетка со стрелкой была прямо перед нами. Тогда нижняя клетка развёртки окажется «на дне» кубика, и стрелка на ней будет смотреть влево, а стрелка на грани перед нами – вправо. Среди кубиков на картинке есть только два, в которых стрелки на соседних гранях смотрят в противоположные стороны – это В и Д. Но кубик В не подходит – как ни располагай его, чтобы на грани перед нами стрелка смотрела вправо, вторая стрелка окажется сверху кубика, а не на дне. А кубик Д подходит.

6. Ответ: Г.

Заметим, что семь коротышек, принимающих пилюли каждый день, получили их сегодня и получат завтра. Оставшиеся $13-7=6$ коротышек, которые получили пилюли сегодня, принимают их через день, и завтра за ними не придут. Зато завтра придут те $9-6=3$ коротышки, которым пилюли положены через день, и которые сегодня их не брали. Таким образом, всего завтра за пилюлями придёт $7+3=10$ коротышек.

7. Ответ: В.

Если часовая стрелка стала двигаться в двенадцать раз быстрее, значит, она стала двигаться как минутная. Поэтому угол между ними будет сохраняться. Значит, часовая стрелка всегда будет на четверть круга впереди минутной, ведь в 3:00 часа было именно так. Минутная стрелка движется правильно, поэтому в 3:55 она будет показывать 55 минут, то есть на число 11 на циферблате. Всем перечисленным условиям удовлетворяет ответ В.

8. Ответ: Г, полночь наступит через 8 часов.

Пусть сейчас от начала суток прошло k часов. Тогда через два часа до полуночи останется $24-(k+2)$ часов и это число в три раза больше, чем шесть часов назад оставалось до полудня. Шесть часов назад до полудня оставалось $12-(k-6)$. Таким образом, мы имеем уравнение $24-(k+2)=$ $=3(12-(k-6))$. Преобразовывая, получаем уравнение $22-k=54-3k$ или $2k=32$. Значит $k=16$, то есть от начала суток прошло 16 часов и до полуночи осталось $24-16=8$ часов.

9. Ответ: Г, на острове 16 хитрецов.

Рассмотрим ответы представителей всех племён. Рыцари ответят «да» на первый вопрос и «нет» на все остальные. Лжецы ответят «да» на первые два вопроса и «нет» на третий. Наконец, хитрецы бывают двух типов. Есть хитрецы, которые сначала отвечают правду, потом лгут, потом снова отвечают правду. Такие хитрецы ответят «нет» на все три вопроса. Хитрецы, которые сперва врут, потом говорят правду, потом снова врут, ответят «да» на все три вопроса. Таким образом, мы видим, что на первый вопрос «нет» ответили только хитрецы первого типа, то есть их ровно $25-17=8$. На последний, третий вопрос «да» ответили только хитрецы второго типа, то есть их тоже 8. Значит, всего хитрецов $8+8=16$.

10. Ответ: Д, на 2015.

Рассмотрим два последовательных числа. Если первое число не оканчивается на 9, то сумма цифр следующего числа будет на один больше предыдущего. Пусть число оканчивается ровно на k девяток, а $(k+1)$-я цифра с конца – не девятка (если её вообще нет, мы полагаем её нулём). Тогда следующее число будет оканчиваться на k нулей, а $(k+1)$-я цифра увеличится на 1. То есть сумма цифр изменится на $9k-1$. Итак, сумма цифр может изменяться либо на 1, либо на число, дающее остаток 8 от деления на 9. Среди предложенных ответов такому условию удовлетворяет только число 2015. Выбирая k таким образом, чтобы $9k-1=2015$, и рассматривая число из k девяток и следующее за ним, мы получаем пример такой пары чисел.

11. Ответ: Д, 8.

Восемь белых бусин получится, если мы снимем 6 бусин с левого конца и 7 бусин с правого конца бус. Докажем, что больше чем 8 белых бусин получить нельзя. Действительно, пусть нам удалось снять хотя бы 9 белых бусин. Тогда с одного из концов бус мы сняли хотя бы пять белых бусин. Чтобы снять пять белых бусин с правого конца, нужно снять как минимум шесть тёмных, что невозможно. Если же хотя бы пять белых бусин снято с левого конца, то мы сняли уже не меньше 4 тёмных бусин. Тогда с правого конца мы не сможем снять ничего, кроме одной тёмной бусины и двух белых, то есть всего снимем 8 белых бусин. В обоих случаяхполучаем противоречие.

12. Ответ: Б, 55.

Обозначим длинную сторону маленького прямоугольника через a, а короткую сторону – через b. Выразим горизонтальную сторону большого прямоугольника (длина которой – 33) через стороны маленького. Мы получим такое равенство: $a+b+a+a-b=33$. Из этого равенства мы получаем, что $a = 11$. Теперь выразим вертикальную сторону большого прямоугольника через стороны маленького. Получится уравнение $b + a + a + b = 32$. Решаем его, учитывая, что $a=11$, и получаем, что $b=5$. Значит, площадь маленького прямоугольника равна 55.

13. Ответ: А, 75%.

Обозначим данные нам положительные числа a и b, причём $b > a$. Согласно условию мы имеем такое равенство: $\frac{a+b}{2} = 0{,}7b$. Домножая обе части на 2 и перенося b в правую часть, получаем равенство $a = 0{,}4b$. Значит, $\frac{a+b}{2} = 0{,}7b = 0{,}7:0{,}4 \cdot 0{,}4b = \frac{7}{4} \cdot a = 1{,}75a$. Это равенство и означает, что среднее арифметическое данных нам чисел на 75% больше меньшего из этих чисел.

14. Ответ: Г, самая тяжёлая гиря D.

Чтобы это понять, сначала заметим, что первые два равенства ($B + D = 1200$ и $C + E = 2100$) на самом деле просто означают, что гири B и D, а также гири C и E весят больше 1000. Теперь заметим, что неравенство $B + D > 1000$ и равенство $B + E = 800$ означают, что $D > E$. Неравенство $C + E > 1000$ и $B + E = 800$ означают, что $C > B$. Неравенство $B + D > 1000$ и равенство $B + C = 900$ означают, что $D > C$. Наконец, равенства $B + E = 800$ и $A + E = 700$ означают, что $B > A$ (причём ровно на 100 граммов, что неважно для решения). Совмещая три последних неравенства, мы получаем, что $D > C > B > A$, а так как мы выяснили и что $D > E$, мы и получаем, что гиря D – самая тяжёлая.

15. Ответ: В.

Будем считать расстояние от города до деревни за единицу расстояния, а время, которое Федя собирался потратить на путь – единицей времени. Тогда, в наших единицах, скорость на первой части пути равна $\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{9}{8}$, а на второй части пути – $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$. Значит отношение скоростей равно $\frac{9}{8}:\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

16. Ответ: Д, все приведённые события могли произойти.

Продемонстрируем это примерами. Остаётся прежней при умножении на два сумма цифр числа 9, уменьшается в два раза сумма цифр числа 15, уменьшается в пять раз сумма цифр числа 5. Наконец самое трудное – придумать пример числа, сумма цифр которого при умножении на 2 уменьшается ровно в 4 раза. Идея построения такого числа опирается на то, что наличие пятерки в исходном числе добавляет единицу к следующему разряду удвоенного числа, а наличие единицы в числе добавляет двойку к тому же разряду удвоенного числа. Таким образом, если в исходном числе a пятёрок и b единиц (и больше ничего), то сумма цифр полученного числа будет складываться из a единиц и b двоек. То есть нам надо подобрать числа a и b так, чтобы числа $5a + b$ было в четыре раза больше числа $a + 2b$. Это достигается, например, при $a=7$ и $b=1$, то есть сумма цифр числа 15555555 при удвоении уменьшается ровно в 4 раза.

17. Ответ: Г, остаток равен 98.

Прежде всего, сделаем такое наблюдение – остаток R числа A от деления на чётное число B имеет ту же чётность, как и само число. Действительно, разность $A - R$ должна делиться на B и потому обязательно будет чётной. То, что разность двух чисел чётная и означает, что они оба имеют одинаковую чётность. Теперь обратимся к задаче. Предположим, что число N нечётное. Тогда его остатки от деления на числа 2, 4, ..., 100 тоже нечётные. Это значит, что от деления на 2 остаток обязательно 1, от деления на 4 остаток обязательно 3 (он должен быть нечётным, не может быть равным единице и должен быть меньше четырёх), остаток от деления на 6 обязательно 5 и т. д. То есть число $N+1$ делится на все чётные числа от 2 до 100. Заметим, что число $N-1$ даёт остатки 0, 2, 4,..., 98 от деления на 2, 4, 6,..., 100 соответственно, то есть тоже подходит под условие задачи. А значит, N не наименьшее. Теперь пусть N – чётное. Тогда, рассуждая аналогично, мы получаем, что остаток N от деления на 2 равен 0, остаток от деления на 4 равен 2, от деления на 6 – 4 и т. д. То есть $N+2$ должно делиться на все чётные числа от 2 до 100. А значит, его остаток от деления на 100 равен 98.

18. Ответ: В.

Напомним, что отпечаток должен быть зеркальным отражением печати, поэтому ответы А, Б и Д сразу можно отбросить (на этих рисунках буква Г изображена правильно, а не зеркально, как должно быть). Из двух оставшихся ответов надо выбрать В (например, в ответе Г неправильно изображено взаимное расположение букв Г и К).