«НАШ КОНКУРС» («Квантик» №8)

36. *В стране три города: А, В и С. Жители города А всегда говорят правду, города В – лгут, а города С – строго попеременно лгут и говорят правду. В одном из городов случился пожар. Дежурному на каланче позвонили. Состоялся такой диалог:*

– У нас пожар!

– Где горит?

– В городе С.

Куда ехать пожарным?

Фразы звонившего не могли принадлежать ни жителю города A (его фразы противоречили бы друг другу), ни жителю города C (он либо оба раза сказал бы правду, либо оба раза солгал). Значит, звонили из B. Тогда обе фразы лживы, и значит, пожар – в городе A.

37. *Пешеход идёт вдоль шоссе с постоянной скоростью. Каждые 6 минут он видит попутный автобус, а каждые 3 минуты – встречный. Автобусы едут в обе стороны с одной и той же скоростью и отправляются из конечных пунктов через равные промежутки времени. Найдите эти промежутки.*

Так как автобусы идут в обе стороны с равными промежутками, то откуда бы ни начал движение пешеход, и в какую бы сторону по дороге он ни шёл, каждые 6 минут он будет видеть попутный автобус, а каждые 3 минуты – встречный.

Выпустим пешехода из точки A встречи двух автобусов. Пусть он 6 минут идёт вперёд из точки A до точки B, а потом 6 минут идёт назад (из B в A). Посмотрим, сколько автобусов, проехавших через A в направлении B, он насчитает за эти 12 минут. Первый такой автобус догоняет его в момент выхода из A, и за первые 6 минут пешехода догонит ещё один такой автобус (в точке B). Тут же развернувшись, пешеход пойдёт обратно, и значит, за следующие 6 минут встретит ещё два автобуса, едущие из A в B (второй он встретит прямо в точке A).

Получается, что за 12 минут точку A проедут 4 автобуса (причём первый – как раз в момент начала этих 12 минут, а четвёртый – в момент окончания). Значит, эти 12 минут состоят из трёх временных промежутков между автобусами, то есть один промежуток равен 4 минутам.

38. *Коля и Вася зашли в магазин, где всё стоит целое число рублей. Коля купил 3 пачки сока и 4 булочки, после чего расплатился без сдачи несколькими 10-рублёвыми монетами. Вася же купил 9 пачек сока и 2 булочки. Докажите, что и он сможет расплатиться без сдачи 10-рублёвыми монетами.*

Пусть пачка сока стоит x рублей, а булочка – y. Тогда Коля заплатил $3x+4y$ рублей, и эта сумма делится на 10. Утроим её – получится число $9x+12y$, и оно тоже делится на 10. Но Вася должен заплатить $9x+2y$ рублей – ровно на $10y$ меньше, то есть это тоже делящееся на 10 число.

39. *Петя нарисовал 5 рисунков. На каждом рисунке он изобразил несколько прямых и отметил все точки пересечения этих прямых друг с другом. В результате на первом рисунке он отметил всего 1 точку, на втором – 2, на третьем – 3, на четвертом – 4 и на пятом – 5.*

а) Приведите примеры таких рисунков.

б) Про какие из Петиных рисунков можно наверняка сказать, сколько на них проведено прямых?

а) Примеры изображены на рисунке 1:

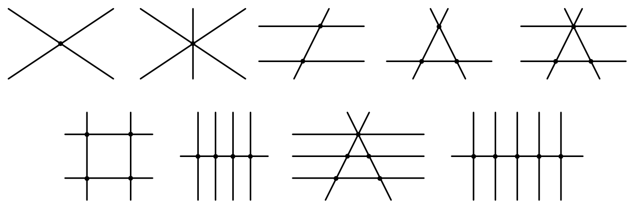


Рис. 1

б) **Ответ:** только про тот, где отмечены две точки пересечения: на нём обязательно будут изображены ровно три прямые. Докажем это. Возьмём одну из точек пересечения (назовём её A): в ней пересекаются какие-то две прямые l_1 и l_2 (как на рисунке 2). Так как есть ещё одна точка пересечения (назовём её B), есть ещё и третья прямая m (не проходящая через точку A). Если m не параллельна ни l_1, ни l_2, то сразу получаем минимум три точки пересечения – противоречие.

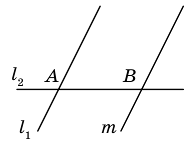


Рис.2

Значит, она параллельна, например, прямой l_1 (и пересекает l_2 в точке B). Получили рисунок с тремя прямыми. Больше никакой другой прямой провести не удастся без добавления точек пересечения: если новая прямая проходит через A и не совпадает ни с l_1, ни с l_2, то она пересечёт m в новой точке. Если новая прямая проходит через B и не совпадает ни с m, ни с l_2, то она пересечёт l_1 в новой точке.

А на других рисунках может быть изображено разное число прямых, как видно из решения пункта а).

Вообще, для любого количества точек N, большего двух, легко привести примеры с разным числом прямых. Это хорошо видно из рисунка 3. В зависимости от того, проводить ли пунктирную прямую на этом рисунке или нет, мы получим пример либо с N, либо с $N+1$ прямыми.

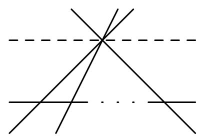


Рис. 3

40. *Три одинаковые банки с тремя разными красками наполнены на две трети каждая. Есть возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (при этом краски, оказавшиеся в одной банке, равномерно перемешиваются). Как сделать во всех банках одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)*

Разольём поровну краску из третьей банки в первую и вторую (они заполнятся доверху). Перемешав содержимое первой банки, отольем половину жидкости в третью банку. То же сделаем со второй банкой. В результате третья банка наполнится доверху, и в ней получится равномерная смесь (ведь в неё попадёт половина от количества первой краски, половина от количества второй краски и два раза по четверти (то есть тоже половина) от количества третьей краски). Затем перельём содержимое второй банки в первую: там тоже образуется равномерная смесь (так как там окажется вся оставшаяся жидкость, кроме той, что в третьей банке). Теперь останется только отлить по трети из первой и третьей банок во вторую, и мы получим во всех трёх банках равномерную смесь.

ДВЕ ЗМЕИ («Квантик» № 9)

а) Фрагмент такого лаза изображён на рисунке 1. Всюду, кроме узкого места, ширина лаза почти равна ширине змеи. В узком месте ширина лаза меньше, чем удвоенная ширина змеи (сечение узкого места изображён на рисунке 2). Длинная змея, пройдя всю петлю, помешает сама себе пролезть через узкое место.


Рис. 1

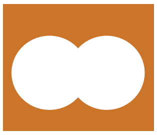


Рис. 2

б) Можно сделать лаз, в котором надо будет перебраться через глубокий ров с отвесными стенками, дотянувшись до другого края. Можно подобрать ширину рва так, чтобы длинная змея могла это сделать, а короткая – нет.

Или пусть лаз сначала идёт горизонтально, а потом уходит вертикально вниз на большую глубину, но в его стенке есть ответвление, ведущее к выходу. Можно сделать так, чтобы длинная змея могла дотянуться до ответвления, держась хвостом за горизонтальную часть, а короткая змея проваливалась вниз, откуда нет выхода.

КАСАТЕЛЬНЫЕ И РАДИУСЫ

Никакого противоречия нет. Когда вы крутитесь на карусели, вас тянет прочь от центра, а не по направлению движения карусели. Капли на крутящемся колесе тоже тянет прочь от центра, поэтому сосульки растут по радиусам. Когда вы будете спрыгивать с карусели, ваши «попутчики» по развлечению увидят, как вы отлетите, опять же, вдоль радиуса (по крайней мере, сначала).

А как всё это выглядит с земли? В момент отрыва вы почти не движетесь относительно карусели, но относительно земли-то карусель быстро крутится. Так что с точки зрения «землян» вы (вместе с полом карусели под вами) несётесь вдоль окружности карусели, даже ещё не спрыгнув с неё. Когда вы разлучитесь, «земляне» увидят, как вы продолжаете свободно лететь в том же направлении, то есть двигаясь по касательной, как и брызги, слетающие с колеса.

Удивительного тут не больше, чем в следующем «парадоксе». Для пассажира машины шип на её колесе движется по окружности, а для пешехода – по сложной завитой линии (циклоиде).

ГОРОХОВЫЙ КОНСТРУКТОР

1. Таких многогранников несколько. Один из примеров – на рисунке 1.

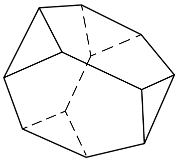


Рис. 1

2. В додекаэдре можно найти 5 разных восьмёрок вершин, являющихся вершинами куба! Один из вариантов – на рисунке 2.


Рис. 2

3. Пример такого многогранника изображён на рисунке 3. Можно доказать, что в любом выпуклом многограннике найдутся две грани с одинаковым числом вершин.

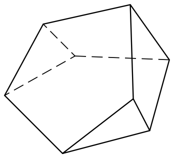


Рис. 3

ДАЙТЕ ПУШКИНУ СДАЧИ

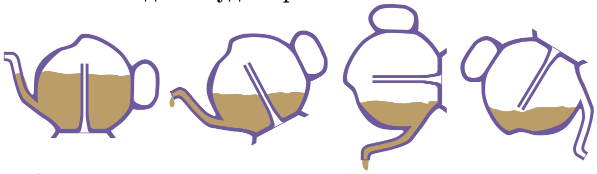
Пушкин и Александр Первый подошли к речке с разных берегов.

СОСУДЫ С СЕКРЕТОМ

1. За один наклон из чайника выливается только та жидкость, что была в носике и его продолжении. Значит, каждому гостю достанется поровну напитка, да и налить слишком много по невнимательности невозможно. В Китае подобные сосуды называли «один глоток».

2. Это сосуд-ловушка для насекомых, которые залетают снизу, учуяв сладкий запах сиропа на донышке. Выбраться им сложно, потому что они окружены стеклом со всех сторон.

3. Чтобы наполнить этот чайник, нужно перевернуть его, налить воду в дырку (примерно до двух третей) и перевернуть обратно. Из картинки видно, почему после этого вода не будет проливаться.



4. По легенде, эту конструкцию придумал Пифагор для того, чтобы в чашу нельзя было налить жидкости больше определённого объёма. Как же пользоваться чашей?

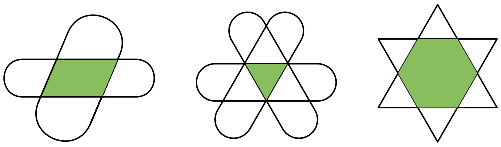
Верхняя и нижняя ёмкости соединены с помощью тонкого канала. Пока уровень воды в верхней ёмкости не доходит до изгиба канала, вода из верхней ёмкости не может перелиться вниз, и чаша в использовании ничем не отличается от обычной. Но если налить воды в чашу до уровня выше изгиба тонкой внутренней трубки, вся вода выльется в ёмкость. О том, почему так произойдёт, рассказано в статье «Шерлок Холмс и самопереливающийся бензин» из «Квантика» №7 за 2013 год.

ГАЙДАР, ЭЙНШТЕЙН, ЕСЕНИН

История с Есениным никак не может быть правдой, ведь в те времена еще не было магнитофонов. К тому же его настоящее стихотворение начинается словами «*Разбуди* меня завтра рано, о моя терпеливая мать!»

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

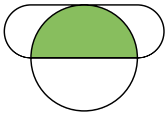
1, 2, а, б).Фигуры надо представить в виде пересечения уже полученных.



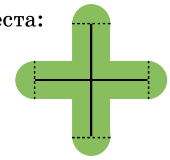
2, в). Достаточно представить многоугольник в виде пересечения нескольких фигур с рисунка 1, будем называть такие фигуры (окрестности отрезка) «овалами».

Сначала через одну из сторон многоугольника проведём прямую. Так как многоугольник выпуклый, он целиком будет лежать по одну сторону от прямой. Теперь нарисуем большой овал так, чтобы он одной своей границей шёл вдоль этой прямой и содержал бы весь многоугольник внутри себя. Проделаем то же самое для каждой стороны многоугольника. Нетрудно сообразить, что пересечение всех полученных овалов и будет исходным многоугольником.

3.



4. Окрестность креста:



Окрестность окружности – кольцо. Окрестности прямоугольника и его границы можно увидеть на рисунке 7 в статье.

5. Ответ: $S+PR+\pi R^2$.

Окрестность выпуклого многоугольника состоит из следующих частей: самого многоугольника; прямоугольников, основания которых – стороны многоугольника, а высоты равны R; секторов радиуса R с центрами в вершинах многоугольника. Суммарная площадь прямоугольников равна PR, а из секторов складывается круг радиуса R.

6. Искомый контур – это граница окрестности вдвое меньшего радиуса этого креста.

7. Искомый контур – это граница окрестности этого полукруга.

XX ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А. П. САВИНА

1. Иван может упорядочить названные Кащеем числа $a<b<c<d<e<f$ и расставить их как на рисунке 1. Тогда $a+b+d<a+c+f$, так как $b<c$ и $d<f$. Кроме того, $a+c+f<d+e+f$, поскольку $a<d$ и $c<e$. В итоге $a+b+d<a+c+f<d+e+f$, то есть все три суммы на сторонах различны.

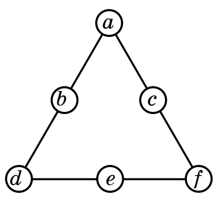


Рис. 1

2. Ответ: через 2 минуты.

Второй таракан выбегает через минуту после первого и догоняет его за 2 минуты. При этом они пробегают одно и то же расстояние, поэтому скорость второго таракана в $\frac{3}{2}$ раз больше, чем скорость первого. Аналогично, третий таракан бежит в $\frac{4}{3}$ раза быстрее второго, ... двадцатый – в $\frac{21}{20}$ раз быстрее девятнадцатого. Следовательно, скорость двадцатого таракана в $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{21}{20}=\frac{21}{2}$ раз больше, чем у первого, а скорость их сближения равна $\frac{19}{2}$ скорости первого. Между ними было расстояние, которое первый таракан преодолел за 19 минут, поэтому двадцатый таракан догнал его через $19:\frac{19}{2}=2$ минуты.

Замечание. Как видно из решения, ответ не зависит от порядкового номера догоняющего таракана.

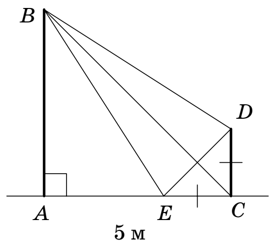
3. Ответ: на 101.

Пусть Лёша записал в вершинах куба числа a, b, c, d в указанном порядке. Тогда $a+b+c+d=100$. Саша получил сумму произведений $ab+bc+cd+da=X$. Пусть Лёша увеличил на 1 числа a и b. Новая сумма произведений $(a+1)(b+1)+(b+1)c+cd+d(a+1)=(ab+bc+cd+da)+a+b+1+c+d=X+100+1$ больше старой на 101.

4. Ответ: провод натянут.

Введём обозначения так, как показано на рисунке 2, и проведём BC. Так как треугольник BAC – прямоугольный и равнобедренный, то $\angle BCA=45^\circ$, тогда и $\angle BCD=45^\circ$. Треугольники BCE и BCD равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BE=BD$.

Рис. 2



В процессе падения провод также не мог порваться. Действительно, конец столба прочертил дугу *внутри* треугольника BDE, а этот треугольник лежит, очевидно, внутри круга с центром B и радиусом $BD=BE$. Значит, расстояние от B до вершины падающего столба в любой момент было не больше BD.

5. Ответ: можно.

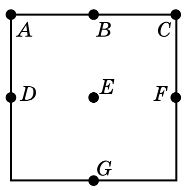


Рис. 3

Отметим две соседние вершины квадрата, его центр и середины всех сторон (рис. 3). В полученной конструкции 21 прямоугольный треугольник: ABE, BED, ADE, ABD, CFE, BEF, BCF, BCE, DEG, EFG, ACF, ACD, CFD, ADF, ABG, BCG, AEC, BDF, BFG, DFG, BDG.

6. Ответ: можно.

Отложим на высоте CH равностороннего треугольника ABC такую точку D, что $DH=AH=BH$. Тогда все углы треугольников ABD, ADC и BDC легко считаются (рис. 4), и из этих треугольников складывается треугольник $DC'C''$ (рис. 5). Треугольники ADC, BDC на рисунке 4 равны треугольникам ADC' и BDC'' на рисунке 5.

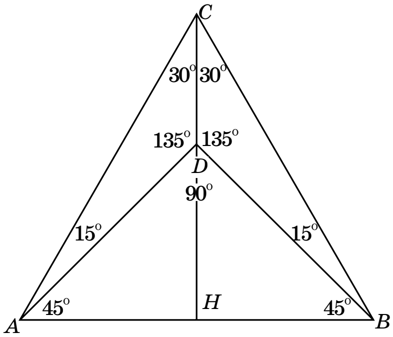


Рис. 4

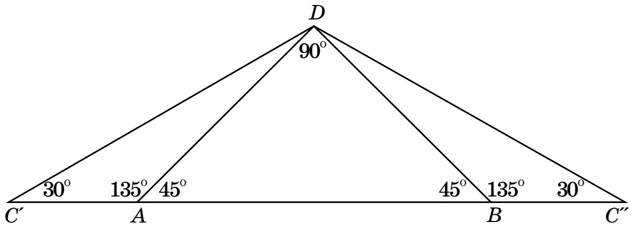


Рис. 5

7. Ответ: можно.

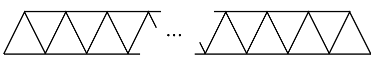
Как команда может занять «чистое» второе место, набрав 5 очков, показано в таблице.

1	2	3	4	Очки
	3 1	3 3	3 3	16
0 1		1 1	1 1	5
0 0	1 1		1 1	4
0 0	1 1	1 1		4

Замечание. Менее чем с 5 очками «чистого» второго места занять нельзя. Действительно, в матчах между 2-й, 3-й и 4-й командами было разыграно не менее 12 очков. Значит, либо они все набрали по 4 очка, либо 2-я набрала как минимум 5.

8. Ответ: выигрывает Петя.

Рис. 6



Изобразим полоску немного в другом виде, как бы «скосив её набок» так, чтобы у неё появилась ось симметрии (рис. 6), суть игры от этого не изменится. Первым ходом Петя может покрасить центральный отрезок на верхней стороне в любой цвет, а дальше после каждого хода Васи может выбирать отрезок, симметричный только что покрашенному, и красить его в другой цвет. При такой стратегии центральный треугольник не может быть покрашен в один цвет. А если бы после хода Пети образовался другой треугольник с одноцветными сторонами, то симметричный ему был бы уже покрашен в один цвет после хода Васи. Таким образом, Петя не проиграет, а так как игра рано или поздно закончится, то он выиграет.

9. Укажем способ найти настоящую монету, если выяснится, что среди трёх монет не более одной фальшивой (назовем такую тройку монет *хорошей*). Для этого сравним две из этих монет, заплатив третьей монетой. При неравенстве в качестве настоящей укажем на более тяжёлую монету, при равенстве – на любую монету с весов. Действительно, мы укажем верно, если заплачено настоящей монетой, а если заплачено фальшивой, то на весах обе монеты – настоящие.

Итак, изначально у нас есть шесть монет. Заплатим 6-ю за взвешивание первых двух.

Случай 1. Весы показали неравновесие. Тогда фальшива или 6-я, или более лёгкая из взвешенных. Поэтому тройка монет «3-я, 4-я и более тяжёлая на весах» – хорошая, и мы можем найти среди них настоящую.

Случай 2. Весы показали равенство. Тогда сравним 1-ю с 3-й, заплатив 5-й монетой. При неравенстве аналогично тройка «2-я, 4-я и более тяжёлая» – хорошая, из неё найдем настоящую. При равенстве во второй раз хорошей будет тройка «1-я, 2-я, 3-я». Действительно, иначе 4-я, 5-я и 6-я монеты – настоящие, т.е. показания весов были достоверными, и первые три монеты – одинаковые. Противоречие.

10. Ответ: за 9376 операций.

Назовём натуральное число *особым,* если все его цифры чётны. Только из особых вычитается 2. Заметим, что никакое особое число не будет пропущено. Действительно, «перепрыгнуть» через число x можно, только вычтя 2 из $x+1$. Однако тогда $x+1$ – особое, и, значит, чётное, а x – нечётное, то есть не особое. Итак, количество вычитаний 2 равно количеству особых чисел, меньших 10000. Для удобства подсчёта к каждому такому числу припишем, если надо, нули в начало, чтобы оно стало четырёхзначным. Есть 5 чётных цифр, и количество четырёхзначных записей из них равно $5^4=625$. Отбросив запись 0000, найдём, что 2 вычиталось 624 раза. Вычитая по 1, мы получили бы 0 из 10000 за 10000 вычитаний. Благодаря вычитаниям по 2 мы «сэкономим» 624 вычитания, то есть 0 будет получен за $10000-624=$ $=9376$ операций.

11. Ответ: Валя, Женя и Саша – девочки.

Предположим, что Женя – мальчик. В этом случае его высказывание было верным, то есть он легче Саши. Следовательно, Саша также является мальчиком. Тогда из утверждения Миши получаем, что и Валя – мальчик. Значит, все дети были правы в своих предположениях, но высказывания Миши и Вали противоречат друг другу.

Таким образом, Женя – девочка. Из её высказывания следует, что она тяжелей Саши, поэтому Саша также является девочкой. Тогда Саша оказалась права, из чего следует, что и Валя – девочка. Легко убедиться, что когда Валя, Женя и Саша – девочки и Саша легче Жени, все условия выполнены.