СМОТРИ!

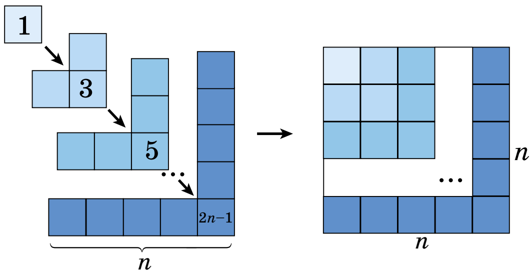
Егор Бакаев

РИСУЕМ СУММУ НЕЧЁТНЫХ ЧИСЕЛ

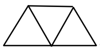
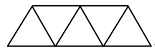
В самом первом номере «Квантика» рассказывалось, как доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2:

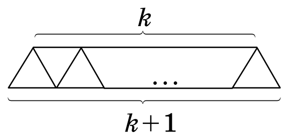
$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$\dots$$
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Идея была в том, чтобы показать, что из фигурок, состоящих из 1, 3, 5, 7,…, $2n-1$ квадратиков, можно составить квадрат размером $n\times n$:

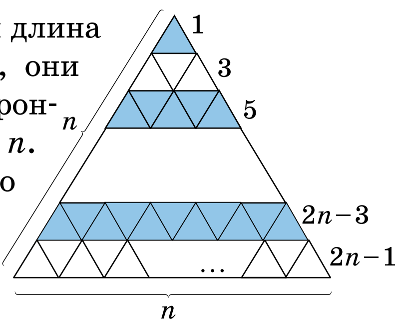


Мы докажем это утверждение иначе: будем собирать фигуру не из квадратиков, а из треугольничков.

Сначала склеим полоску из трёх треугольничков: , из пяти треугольничков: , и так далее… $2k+1$ треугольничков склеиваются в полоску, которая сверху имеет длину k, а снизу – длину $k+1$:



Значит, если мы расположим одну под другой n полосок – из 1, 3, 5, … , $2n-3$, $2n-1$ треугольничков, то нижняя длина каждой полоски будет такой же, как верхняя длина следующей. Таким образом, они все собираются в равносторонний треугольник со стороной n.



Осталось доказать, что в этом треугольнике ровно n^2 равносторонних треугольничков со стороной 1.

Совсем коротко это можно доказать, сославшись на теорему из курса геометрии 8 класса:

Если две фигуры подобны (иными словами, имеют одинаковую форму, но разный размер), а их размеры отличаются в k раз, то площади этих фигур отличаются в k^2 раз.

(Подробней об этом и других свойствах площади можно узнать, например, из книжки Г. Мерзона и И. Ященко «Длина, площадь, объём».)

Мы приведём другое доказательство, доступное и тем, кому учиться в 8 классе ещё только предстоит.

Пусть в нашем треугольнике со стороной n всего x треугольничков со стороной 1.

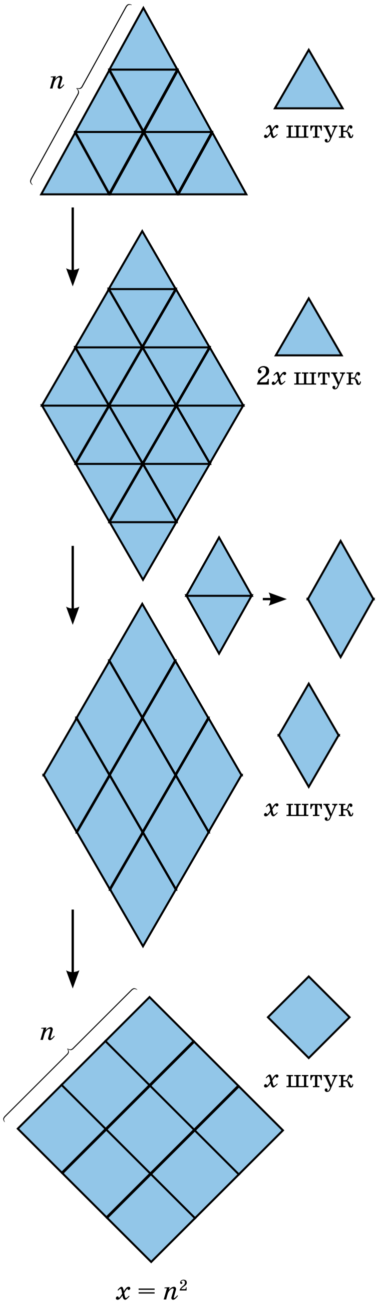
Подрисуем к нему снизу такой же треугольник – число треугольничков удвоилось, теперь их $2x$.

Теперь объединим пары треугольничков в ромбики – каждый ромбик состоит из двух треугольничков, значит, фигура состоит из $2x/2 = x$ ромбиков.

Осталось немного сплющить картинку, и тогда ромбики превратятся в квадратики.

Теперь на картинке – квадрат со стороной n, разрезанный на x квадратиков со стороной 1.

Значит, $x = n^2$. Получается, что и сначала в треугольнике было n^2 треугольничков – что мы и хотели доказать.



Художник Tory Polska