Игорь Акулич

НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ СО СТРЕЛКАМИ

(Эта статья написана как продолжение статей о стрелках в «Квантиках» № 1, 6, 7 за 2012 год и № 4, 5 за 2014 год)

– Знаешь, Даня, гляжу я на часы и думаю: до чего же неисчерпаемый это предмет!

– Опять философствуешь, Федя?

– Нет, дело в другом. Решили мы с тобой приличное количество задач про циферблат со стрелками. Казалось бы – что может быть нового? И вдруг случайно обнаружилась ещё одна, которую, как оказалось, решал ещё сам Эйнштейн[1], – а мы о ней даже не слышали. Правда, он это делал во время болезни, для развлечения. И справился за пару минут!

– Ну, тогда и мы займёмся ею, как только заболеем. А то в здравом уме как-то нечестно...

– Нет уж, отступать я не намерен. Тем более решения-то я не знаю – только условие. Самому интересно, какой там ответ.

– Ладно, излагай.

– Имеются правильно идущие часы с двумя стрелками – часовой и минутной.

– Спасибо, что с двумя, а не с тремя. А лучше бы с одной...

– Не перебивай! Спрашивается: сколько существует моментов времени от нуля до двенадцати часов, когда стрелки не совпадают[2], но если их поменять местами, то они покажут время, тоже возможное на правильных часах?

– Хм... Ответ как-то и не просматривается. Неясно даже, существует ли хотя бы один такой момент.

– И я о том же! Если стрелки совпадают, то их, конечно, можно менять, и такие совпадения, как мы помним, происходят каждые $\frac{12}{11}$ часа. А если нет... Впрочем, думаю, можно использовать наш подход при решении прошлых задач – когда мы полный оборот обозначали через единицу.

[1] Об этом сообщает Я.И. Перельман в книге «Занимательная алгебра»; при этом он ссылается на А. Мошковского, биографа великого учёного, и приводит неимоверно громоздкое решение.

[2] В книге Я.И. Перельмана решается задача, когда случаи совпадения стрелок тоже учитываются.

– Ну, если в таком ключе, то дорога ясна. Пусть часовая стрелка прошла путь x, где x не меньше нуля, но меньше единицы... Тогда минутная стрелка прошла путь $12x$. При этом стрелки не совпали, так что разность $12x-x=11x$ – *не целое* число! Правда, что это даёт?

– Пока вроде ничего. Ладно, давай мысленно поменяем стрелки. В такое положение часовая стрелка попадёт, пройдя путь $12x$. Тогда минутная прошла $12 \cdot 12x = 144x$. И это положение должно совпасть с прежним положением часовой стрелки, то есть x, так что $144x-x=143x$ уже, наоборот, целое число!

– Погоди-ка! Ишь, разошёлся! Как это у тебя часовая стрелка прошла путь $12x$? Ведь её путь не больше единицы!

– Ладно, специально для тебя скажу строго: новое положение часовой стрелки совпадает с прежним положением минутной, которая прошла путь $12x$. Значит, часовая в новом положении продвинулась на $12x-n$, где n – такое целое число, что $12x-n$ принимает значение от 0 до 1. Так сказать, отбросили целую часть! Тогда минутная стрелка прошла $12 \cdot (12x-n) = 144x-12n$. И это положение должно совпасть с первоначальным положением часовой стрелки, откуда следует, что $(144x-12n)-x=143x-12n$ есть *целое* число! Значит, и $143x$ целое!

– Тогда Эйнштейн действительно был прав – задача-то проста, как грабли! Итак, надо всего-то найти такие x между 0 и 1, что $143x$ – целое число, а $11x$ – не целое! Понятно, что чисел первого вида будет ровно 143, а именно: 0, $\frac{1}{143}$, $\frac{2}{143}$, и так далее вплоть до $\frac{142}{143}$. Но как учесть, что $11x$ не целое?

– Да проще простого! Заметь – 143 делится на 11 – при делении получается 13. Поэтому если мы наши 143 получившиеся дроби умножим на 11, то получим другие 143 дроби: 0, $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, ..., $\frac{142}{13}$. Осталось отбросить те, числители которых делятся на 13. Это, понятное дело, 0, затем 13, 26, 39 ... что там ещё?

– Давай проще: так как 143 – это 11×13, то если 142 поделить на 13, получится число, чуть меньшее 11. Поэтому среди наших дробей ровно одиннадцать (от 0 до $10 \cdot 13 = 130$) окажутся целыми числами.

А остальные $143 - 11 = 132$ нам подходят. Итак, имеется 132 момента, когда стрелки не совпадают и при замене их местами получается корректное время. Кстати, довольно частое явление – в среднем каждые минут пять наступает.

– Знаешь, а гордиться-то особенно нечем – получилось слишком просто. Даже голову поломать не над чем...

– А что, хочешь-таки поломать? Тогда я сам могу тебе предложить задачу. Мне из Минска о ней сообщили[2]. Там тоже фигурируют часы – правда, не со стрелками, а электронные – с цифровым табло, показывающим время в часах и минутах.

– Слушаю.

– Формулировалась она так. Некий авиапассажир, вынужденный из-за нелётной погоды маяться в аэропорту, как-то взглянул на табло и увидел там время 01:21. «Удивительно! – подумал он. – 121 – точный квадрат, а если это время перевести в минуты, прошедшие с начала суток, то получится 81 минута – опять-таки точный квадрат! Вряд ли я сегодня снова увижу что-то подобное». Тем не менее, до окончания суток ещё раз появилось время, обладающее такими же свойствами. Какое это время?

– Не думаю, что всё так уж сложно. Обозначим число часов через x, где x – натуральное от 1 до 23, а число минут через y, где y – целое неотрицательное от 0 до 59. Если составить систему уравнений...

...На этом позвольте прервать содержательную беседу. Причина проста: она *слишком долго* может продлиться. Известные пока что способы решения требуют либо огромного перебора, либо использования компьютера (опять же, чтобы выполнить перебор, но быстрее). Ответ и впрямь единственный, но найти его и, главное, доказать эту единственность – очень и очень непросто. Попробуйте – может, сумеете найти простое и компактное решение. Тогда поделитесь им с нами. А кто хочет избежать мучений – посмотрите на с. 31, где приведён ответ.

[2] Её придумали авторы многих задач белорусских математических олимпиад Е. Барабанов и И. Воронович ещё в прошлом веке. Но ни на одном конкурсе она не предлагалась – по изложенным в тексте причинам.

Художник Алие Аблямитова