Игорь Акулич

НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПРОДОЛЖАЮТСЯ

– Скажи-ка мне, Даня, только быстро: сколько секунд за секунду проходит секундная стрелка часов?

– Как это сколько? Одну!

– Нет, имеются в виду *угловые*[1] секунды.

– Э-э-э... шестьдесят! (Пауза.) Нет! (Пауза.) Шестьсот! (Пауза.) Не знаю!

– Ну, хоть примерно.

– Пусть будет тысяча. Угадал?

– Почти. Ошибся всего-то в двадцать с лишним раз.

– Не может быть! Ну-ка, проверим. За секунду стрелка проходит одну шестидесятую часть оборота. Оборот – это 360 градусов, так что получаем 6 градусов, и это $6 \times 60 = 360$ угловых минут или же $360 \times 60 = 21600$ угловых секунд. И правда, малость промахнулся... Стоп! А чего это ты, Федя, опять о часах тут начал? Снова задачу откопал?

– Да не одну, а сразу пару[2]! И в обеих фигурирует какой-то загадочный *придворный астролог царя Гороха*. Слушай первую. Астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата. Какого времени в сутках больше – хорошего или плохого?

– Что-то не соображу: как это – по одну сторону от какого-нибудь диаметра?

– Это значит, что можно так «разрубить» часы прямолинейно через центр, что все три стрелки окажутся в одной половине.

– Тогда, конечно, плохого времени больше. По-моему, стрелки чаще в разные стороны торчат, чем в одну... Но как это доказать?

– А ты уверен, что прав? Представь себе, что две стрелки совпадают. Тогда при *любом* положении

[1] Угол в 1 градус, подобно часу, делится на 60 равных углов, называемых *угловыми минутами*, угловая минута делится на 60 равных углов, называемых *угловыми секундами*.

[2] Автор задач – Д. Ботин.

третьей стрелки время будет *хорошее*! Если же две стрелки *почти* совпадают, то тогда, конечно, не всякое положение третьей стрелки даст хорошее время, но *почти* всякое – это уж точно.

– Да... признаю свою ошибку. Наверно, всё-таки, хорошего времени больше получается. Но проблема-то всё та же: как это доказать? Подсчитать продолжительность того и другого времени в течение суток (впрочем, достаточно и полусуток)? Да мы вымрем, пока это сделаем!

– Слушай, а зачем нам подсчитывать? Нас ведь не спрашивают об этой самой продолжительности, а только *какого времени больше*! Значит, надо как-то сравнить, да и дело с концом.

– Я вот что думаю. Надо сначала наглядно представить, при каком расположении стрелок время будет плохое, а при каком – хорошее. Выберем две любые стрелки и «зафиксируем» их. Где в этом случае может находиться третья стрелка, чтобы время было хорошим? А плохим? Я пока не говорю о том, возможно ли в реальности показываемое ими время (мы уже знаем, что стрелки «увязаны» между собой довольно жёстко, но пока это учитывать не будем).

– Давай лучше нарисуем две стрелки OA и OB (рис.1) с некоторым углом между ними – так нагляднtей. Если время, допустим, хорошее, то где тогда находится третья стрелка OC? Не соображу...

– А я соображу! Давай продлим эти две стрелки за точку O и получим их «антиподы» OA_1 и OB_1 (рис.2). Заметим, что конец C третьей стрелки может лежать и на дуге B_1A, и на дуге AB, и на дуге BA_1 – и везде время будет хорошим! И только если C лежит на дуге A_1B_1, то время получится плохое.

– И что из этого следует?

– Решение из этого следует! Пусть OA и OB – минутная и секундная стрелки (или наоборот). Если конец часовой стрелки C лежит на дуге A_1B_1, то такое время – плохое, но ровно через 6 часов часовая стрелка переместится ровно на пол-оборота – на дугу AB,

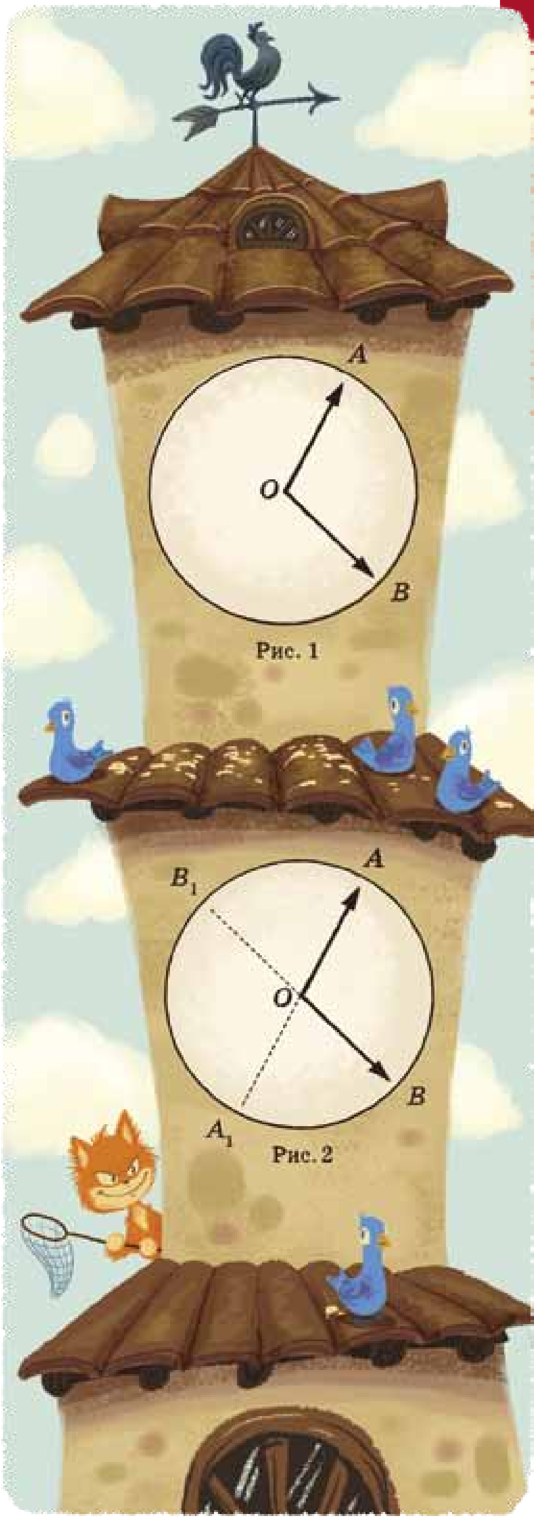

Рис. 1

Рис. 2

а остальные две окажутся в тех же местах, что и прежде, и время станет хорошим. Значит, каждому плохому моменту времени можно поставить в соответствие хороший момент. Следовательно, суммарно хорошего времени уж никак не меньше, чем плохого.

– А может, поровну?

– Нет, не поровну. Ведь если изначально точка C находится на дуге B_1A, то через 6 часов она перейдёт на дугу BA_1. А ведь *оба* таких момента – хорошие! Значит, бывает, когда хорошему моменту соответствует другой хороший момент. А вот чтобы плохому соответствовал плохой – это невозможно. Могу и пример привести. Скажем, время 3.00 – хорошее, верно?

– Верно...

– Ну, и 9.00 – тоже хорошее. Так что задача решена: хорошего времени больше! Это радует. Ладно, выкладывай вторую задачу.

– Вторая похожа с виду. Придворный астролог называет время суток хорошим, если по ходу часов минутная стрелка расположена после часовой и перед секундной. Вопрос тот же: какого времени больше?

– Думаю, и здесь можно применить аналогичный подход. На том же рисунке 2 если OA – минутная стрелка, а OB – секундная, то для часовой стрелки плохое время – если точка C лежит на дуге AB, а если на остальных трёх дугах – то хорошее. Если же OA – секундная стрелка, а OB –минутная, то... наоборот. Вот тебе и раз! Не выходит что-то...

– Нет здесь надо по-другому. Есть идея: *симметрия*!

– Какая здесь симметрия?

– А вот какая. В 0 часов 00 минут все стрелки вертикальны, и в 12.00 – тоже. Пусть после полуночи прошло время t (в часах), где t меньше 6. В этот момент стрелки как-то расположились по циферблату, и время может быть как плохим, так и хорошим. А теперь возьмём «симметричный» момент – за t часов до наступления полудня. Обрати внимание: стрелки расположатся симметрично первоначальному их расположению относительно вертикальной оси, проходящей через центр часов. Ведь это то же самое, что «открутить» стрелки от вертикального положения на t часов *назад*! Ну, а если первое положение стрелок было плохое, то «зеркальное» ему второе положение стало хорошим (и наоборот). Значит, плохого и хорошего времени будет *поровну*! Вот и весь сказ.

– Красота! Может, у тебя ещё какие-нибудь задачи про стрелки есть? Что-то я разохотился…

– Есть, конечно. Например, такая[3]. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперёд. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

– А что значит «гарантированно»?

– Это значит, что при любом исходном расположении стрелок можно «уравнять» их показания не больше чем за такое суммарное время перевода. А для любого меньшего суммарного времени можно указать такое положение стрелок, что мы добиться нужного результата (одинаковых показаний) не сумеем.

– Что ж, достойная нас задача. И, главное, часов-то уже несколько стало. Чувствую, и здесь без симметрии не обойтись… Например, все пять стрелок смотрят в разные стороны, как иглы у ёжика! В смысле, если их циферблаты совместить, то часовые стрелки разобьют окружность на 5 равных секторов – через каждые $\frac{12}{5}$ часа, то есть 2 часа 24 минуты. Чувствую, это самый худший вариант…

А теперь давайте прервём это увлекательное рассуждение, чтобы не лишать читателя удовольствия самому одолеть задачу. Ну а кто не сумеет – милости просим на стр. 29, где решение доведено до конца.

[3] Автор задачи – О. Подлипский.

Художник Евгений Паненко