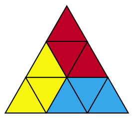
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 3, 2015)

11. *Может ли так быть, что к числителю дроби прибавили 1, к знаменателю прибавили 10, а дробь от этого увеличилась? (Числитель и знаменатель дроби – целые положительные числа).*

Ответ: может – например, дробь $\frac{1}{20}$ подходит: $\frac{1+1}{20+10}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}>\frac{1}{20}$. Подойдёт и любая дробь, меньшая $\frac{1}{10}$.

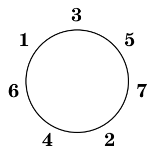
12. *Плитка склеена из трёх равносторонних треугольников со стороной 1 см и имеет форму четырёхугольника со сторонами 1 см, 1 см, 1 см, 2 см. Можно ли такими плитками замостить равносторонний треугольник со стороной* а) 9 *см*; б) 10 *см*?



а) Можно. Достаточно научиться разрезать на плитки равносторонний треугольник со стороной 3 см. А на такие треугольники легко разрезать равносторонний треугольник со стороной 9 см.

б) Нельзя – каждая плитка состоит из трёх треугольничков, а в равностороннем треугольнике со стороной 10 см таких треугольничков 100 штук (проверьте!), что на 3 не делится.

13. *За завтраком 7 гномов сидели за круглым столом. За обедом они хотят сесть за этот же стол так, чтобы количество сидящих между каждыми двумя гномами поменялось. Получится ли у них это сделать?*



Ответ: получится. Занумеруем гномов в том порядке, в котором они сидели за завтраком. За обедом рассадим их через одного, как на рисунке справа.

Если два гнома раньше сидели рядом, то теперь они сидят через двух. Если два гнома сидели через одного, то теперь сидят рядом. Если два гнома сидели через двух, то теперь сидят через одного.

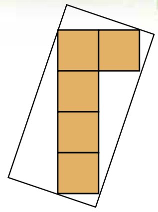
Если гномов не 7, а любое число, не делящееся ни на 2, ни на 3, то их можно рассадить аналогично.

14. *Десять человек пришли в гости в шляпах. Уходили они по одному, и каждый надевал любую шляпу, которая на него налезала. Если такой шляпы не было, то гость уходил без шляпы. Какое наибольшее число гостей могло уйти без шляп?*

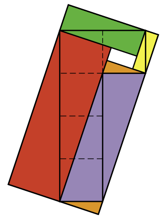
Ответ: пять человек. Пример придумать легко – пять человек с самыми маленькими размерами шляп могут уйти в пяти шляпах самого большого размера, и тогда остальным придется уйти без шляп.

А как доказать, что не могут уйти без шляп шесть гостей? Допустим противное – шесть каких-то человек не смогли уйти в шляпах. У каждого из них была шляпа подходящего размера, всего получаем шесть шляп. Но унесли максимум четыре шляпы из этих шести (ушедших ведь четверо). Значит чья-то шляпа осталась нетронутой, и этот человек тоже может уйти в своей шляпе! Противоречие. Тем более не могут уйти без шляп более шести гостей.

15. *Дом имеет форму буквы «Г» из пяти клеток. Вокруг дома построили забор в виде прямоугольника, как показано на схеме внизу. Что больше внутри забора: площадь, занимаемая домом, или площадь, свободная от дома?*

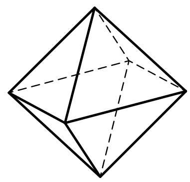


Ответ: площадь, занимаемая домом, больше. Смотри! На рисунке оранжевые участки одинаковы, а каждый из остальных участков одного цвета делится границей дома на две равные половины. Поэтому площадь, занимаемая домом, больше на площадь белого прямоугольного участка.



КРУГЛЫЙ КУБИК («Квантик» № 4, 2015)

Например, внутри круглого «кубика» может быть полость, в которой катается грузик, причём он останавливается в одном из шести положений. Полость можно сделать в виде *октаэдра* с вершинами напротив точек на игральном кубике. Заметим, что, например, полость в виде куба не подойдёт – у него восемь вершин.



Октаэдр

НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПРОДОЛЖАЮТСЯ

Завершение решения задачи

Пусть часовые стрелки равномерно «разнесены» по циферблату и расхождение между соседними стрелками составляет $\frac{12}{5}$ часа. Если мы хотим совместить показания всех часов при наименьшем суммарном времени перевода, то ясно, что итоговое положение стрелок должно совпадать с исходным положением одной из них. Действительно, если окончательное положение стрелок – какое-то «промежуточное», то можно обойтись и меньшим суммарным временем перевода, доведя стрелки до исходного положения ближайшей предыдущей стрелки.

Итак, конечное положение всех стрелок совпадает с исходным положением одной из них. Какой именно? В силу симметрии – *любой*! Тогда, как легко убедиться, суммарное время перевода составит $\frac{12}{5}+2\cdot\frac{12}{5}+3\cdot\frac{12}{5}+4\cdot\frac{12}{5}=24$ часа. Итак, минимальное суммарное время перевода никак не меньше 24 часов.

Докажем, что оно и не больше 24 часов. 5 часовых стрелок разбивают циферблат на 5 частей. Начав с любой из них и продвигаясь по часовой стрелке, обозначим величины этих частей (в часах) через t_1, t_2, t_3, t_4 и t_5. Так как эти части образуют полный круг (12 часов), то $t_1+t_2+t_3+t_4+t_5=12$. Будем переводить все стрелки так, чтобы совместить их с положением одной из них. Очевидно, здесь возможны 5 вариантов. Для одного из них суммарное время перевода, как легко сообразить, равно $S_1=(t_2+t_3+t_4+t_5)+(t_3+t_4+t_5)+(t_4+t_5)+t_5=t_2+2t_3+3t_4+4t_5$. Для второго оно равно $S_2=(t_3+t_4+t_5+t_1)+(t_4+t_5+t_1)+(t_5+t_1)+t_1=t_3+2t_4+3t_5+4t_1$. Продвигаясь далее по кругу, аналогично найдем $S_3=t_4+2t_5+3t_1+4t_2$, $S_4=t_5+2t_1+3t_2+4t_3$ и $S_5=t_1+2t_2+3t_3+4t_4$. Сложив все эти равенства, получаем: $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=10(t_1+t_2+t_3+t_4+t_5)=10\cdot 12=120$. Итак, сумма пяти чисел равна 120, поэтому хотя бы одно из них не превышает $120:5=24$. Именно к соответствующей стрелке и надо передвигать все остальные.

Таким образом, минимальное суммарное время перевода и не меньше 24, и не больше 24 часов. Следовательно, оно равняется как раз 24 часам.

Примечание. Читатель без труда может убедиться, что если бы имелось не 5, а n часов, то наименьшее суммарное время перевода составило бы $6(n-1)$ часов.

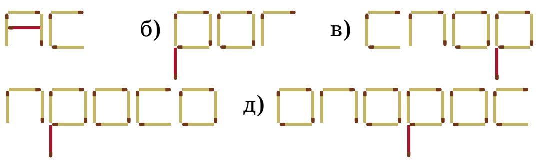
ПРО ТОЛСТЯКА

Лишь за несколько часов до забега мясник раскрыл карты: он выбрал улицу Блэк-Лайон-Лэйн (переулок Чёрного Льва) – одну из самых узких в Великобритании. Сразу после старта Бэрримор догнал своего противника, однако... так и не смог протиснуться мимо него, чтобы первым прийти к финишу. Говорят, граф признал себя проигравшим и честно выплатил Буллоку всё, что ему причиталось.

СЛОВА ИЗ КВАДРАТИКОВ

Часть 1

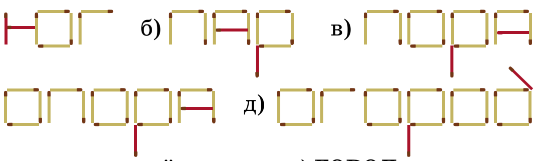
а) б) в) г) д)



Дополнительные варианты: а) ПА; г) ОПРОС.

Часть 2

а) б) в) г) д)



Дополнительный вариант: г) ГОРОД.

Часть 3

а) НИЛ;

б) ЯЛО (отражение в зеркале пионерки Оли из сказки В. Губарева «Королевство кривых зеркал»);

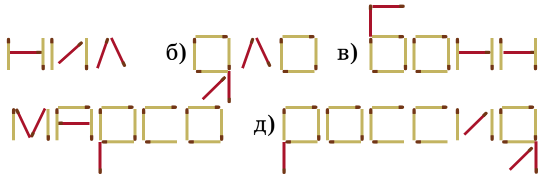
в) БОНН (до и после указанного периода столицей единой Германии был Берлин);

г) МАРСО (Марсель Марсо (1923–2007) – всемирно известный мим, основатель Парижской школы пантомимы);

д) РОССИЯ (в течение указанного периода входила в состав Советского Союза и самостоятельным государством не являлась).

Итоговое расположение спичек указано ниже:

а) б) в) г) д)



ДИККЕНС, ШАЛЯПИН И ВАНГА

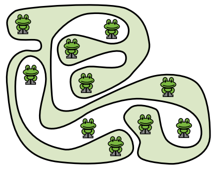
История про сочинения Ванги – выдумка, ведь слепая девочка не могла писать ровно и красиво. Но Ванга действительно существовала и прославилась как прорицательница.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КОНКУРСА «КЕНГУРУ»

1. Ответ: А. Поскольку грани с кенгуру ни на одном рисунке нет, на обоих рисунках должна быть грань, противоположная ей. На обоих рисунках есть только грань с треугольником, значит, именно она и противоположная грани с кенгуру.

2. Ответ: Г. Башни из пяти кубиков у Кости бывают только двух видов: белый-чёрный-белый-чёрный-белый и наоборот: чёрный-белый-чёрный-белый-чёрный. В башнях, оканчивающихся чёрным кубиком ровно три чёрных кубика, а в башнях, оканчивающихся белым кубиком два чёрных кубика. Значит всего чёрных кубиков было использовано $3\cdot 4+2\cdot 2=16$.

3. Ответ: Б. Закрасив часть, ограниченную кривой, мы увидим, что в пруду сидят шесть лягушек.



4. Ответ: В. Самый простой способ решить эту задачу – пририсовать картинку из условия к каждому ответу. Тогда легко видеть, что замкнутая петля получается только в ответе В, а в остальных случаях получается несколько верёвок.

5. Ответ: В. Легко привести пример, когда будет 21 одинаковое число (см. рисунок). Докажем, что больше одинаковых чисел быть не может. Пусть есть хотя бы 21 одинаковое число. Вычтем это число из всех чисел таблицы. При этом условие задачи не нарушится. По предположению, чисел, отличных от нуля, не больше 4. Значит, есть строчка, состоящая только из нулей. Тем самым мы доказали, что все десять сумм (в строках и столбцах) равны нулю. Это означает, что вместе с каждым ненулевым числом в той же

-1	1	0	0	0
1	-1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

строке и в том же столбце должно стоять как минимум ещё одно ненулевое число. Несложно убедиться, что это невозможно, если в таблице всего одно, два или три ненулевых числа. Значит нулей в таблице не более 21, что и требовалось доказать.

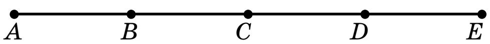
6. Ответ: Д. В ответе А неправильно нарисована буква N, в ответе В – буква R, в ответе Г – буква G. В ответе Б буква R стоит между двумя O, а должна – между A и O. В ответе (Д) всё в порядке.

7. Ответ: Г. Сперва мы замечаем, что годятся почти все двузначные числа с одинаковой цифрой десятков и единиц, кроме числа 44 (сорок четыре) и 11 (оно вообще записывается одним словом). Это семь чисел: 22, 33, 55, 66, 77, 88, 99. Кроме этих чисел мы находим ещё числа 29, 92 и 47. Итого 10 чисел.

8. Ответ: В. Пусть стороны прямоугольника равны x и y, причём x – меньшая сторона. Тогда из рисунка мы видим, что $4x = 3y$, откуда мы обнаруживаем, что $x : y = 3 : 4$. Пусть тогда $x = 3t$, $y = 4t$ для некоторого положительного числа t. Тогда мы видим, что $AB = 3t + 3t + 3t + 3t = 12t$ и $BC = 4t + 3t = 7t$. Отсюда мы получаем, что $AB : BC = 12:7$.

9. Ответ: А. Заметим, что кроме тех пяти кенгуру, которые упомянуты в условии, оставшиеся кенгуру весят $100\% - 25\% - 60\% = 15\%$ суммарного веса всего семейства. Значит, оставшихся кенгуру не может быть два или больше – иначе два из них весили не более 15% от суммарного веса, то есть меньше, чем два самых лёгких. Значит, кроме пяти кенгуру (двух самых лёгких и трёх самых тяжёлых) есть ещё ровно один. Итого в семействе шесть кенгуру.

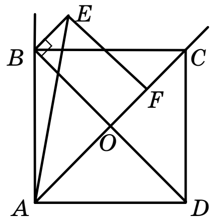
10. Ответ: Г. Пусть пять точек – это точки A, B, C, D, E в порядке возрастания (см. рисунок). Самое большее расстояние – 19 – это расстояние между крайними точками, то есть $AE = 19$. Расстояния 17 и 15 могут быть только расстояния AD и BE, так как любое из других расстояний между парами точек меньше одного из них. Пусть $BE = 17$, $AD = 15$, тогда $AB = 2$, $DE = 4$. Тогда мы обнаруживаем, что $BD = 13$. Теперь задумаемся, какое из расстояний может быть равно 5. Это не может быть AC, так как тогда было бы $BC = 3$, а такого расстояния нет. Это не может быть CE, так тогда было бы $CD = 1$, а такого расстояния в нашем списке тоже нет. Если $CD = 5$, то $BC = 8$ и среди расстояний нет 7. Значит $BC = 5$, а тогда $CD = 8$ и $CE = 8 + 4 = 12$ – отсутствующее расстояние.



11. Ответ: Б. Сначала найдём все раскраски, в которых единица красная. Если больше нет красных чисел, то получаем подходящую раскраску: 1 2 3 4 5… А иначе обозначим следующее красное число за N. Все числа после него тоже красные, ибо они получаются добавлением красной единицы к предыдущему. Если $N = 2$, то все числа красные: 1 2 3 4 5… Если $N = 3$, то получаем другую подходящую раскраску: 1 2 3 4 5… Однако N не может быть больше 3, потому что тогда бы красное $N + 1$ равнялось сумме синих $N - 1$ и 2.

Итак, с красной единицей всего три подходящих раскраски. Ровно столько же – 3 раскраски с синей единицей. Таким образом, всего получается 6 правильных раскрасок.

12. Ответ: Б. Опустим перпендикуляр EF из точки E на диагональ AC (см. рисунок). Также через O обозначим точку пересечения диагоналей квадрата. Также вспомним, что диагонали квадрата перпендикулярны, и значит, $BEFO$ – прямоугольник. Отсюда следует, что $EF = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AE$. Значит, в прямоугольном треугольнике AEF катет EF равен половине гипотенузы AE, откуда мы получаем, что угол EAF равен 30°. Угол BAE тогда равен $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.



13. Ответ: Г. Сантидециметр – это $10^{-2} \cdot 10^{-1} = 10^{-3}$ м, а милликилометр – это $10^{-3} \cdot 10^{3} = 1$ м. Ясно, что в 1 метре 10^{-3} метра содержится 10^{3} раз.

14. Ответ: В. С полуночи до полудня Незнайка говорит правду, поэтому сказать «Сейчас я сочиняю стихи!» он может только тогда, когда он их действительно сочиняет: с 11:00 до 12:00 (1 ч). С полудня до полуночи он лжёт, поэтому сказать «Сейчас я сочиняю стихи» он может только тогда, когда их не сочиняет: с 15:00 до 24:00 (9 ч). Всего получается $1 + 9 = 10$ ч.

15. Ответ: Г. Пусть стоимость мёда в горшочке была M, а стоимость самого горшочка – $Г$. Тогда после изменения цен мёд стал стоить $0{,}4M$, а горшочек – $1{,}6Г$. По условию $0{,}4M = 1{,}6Г$, то есть $M = 4Г$. Сначала цена горшочка с мёдом была равна $M + Г = 4Г + Г = 5Г$, а потом стала равна $2 \cdot 1{,}6Г = 3{,}2Г$. Число 3,2 составляет 64% от числа 5 (так как $3{,}2 : 5 = 64 : 100$), поэтому горшочек с мёдом подешевел на 36%.

16. Ответ: Б. Пусть написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Если, например, $a_1 = a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{10}$, то произведение всех десяти чисел равно a_1^2. Если и число a_2 равно произведению остальных чисел, то произведение всех чисел равно и a_2^2. Следовательно, $a_1^2 = a_2^2$ или $a_1 = -a_2$ (так как a_1 не равно a_2). Если бы нашлось ещё одно число, равное произведению остальных, то оно совпало бы с a_1 или с a_2, а это невозможно. Итак, Вася не мог подчеркнуть более двух чисел. Подчеркнуть два числа он мог. Например, возьмём числа $1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5$. Тогда подчёркнутыми окажутся 1 и –1.

17. Ответ: В. Чтобы в роду появились Васильевичи, сначала должен появиться Василий. Первый Василий не будет Васильевичем, поэтому 5 Васильевичей не совпадут с первым Василием. Значит, потомков не менее 6. Покажем, как можно обойтись шестью потомками. У Ивана Васильевича сын Василий; у Василия два сына: Василий II и Иван; у Василия II два сына: Василий III и Иван; у Василия III сын Иван.