НАШ КОНКУРС («Квантик» № 4, 2015)

16. *– У Димы больше тысячи книг!*

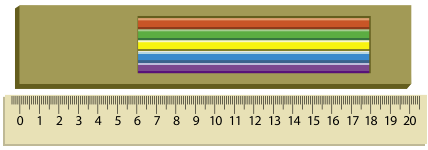
– Да нет, у него меньше тысячи книг.

– Ну уж хотя бы одна-то книга у него точно есть.

Известно, что среди этих утверждений ровно одно верное. Сколько книг может быть у Димы? Укажите все возможные варианты.

Можно рассуждать, например, так. У Димы не может быть больше 1000 книг: тогда и первое, и третье утверждения были бы верны. У Димы не может быть от 1 до 999 книг: тогда верны и второе, и третье утверждения. Остаются две возможности: 1000 книг или ни одной. Проверьте, что обе они подходят под условие задачи.

17. *Квантик купил коробочку с окошком, в которой вплотную друг к другу были уложены карандаши (как на рисунке). Квантик вертел коробочку и так и сяк, но карандаши всегда закрывали всё окошко целиком. Значит ли это, что карандаши длиной со всю коробку? Или они могут быть короче, и тогда какова их минимальная длина?*



Ответ: карандаши могут быть короче, их минимальная возможная длина – 18 см.

Если сдвинуть карандаши к левому краю коробочки, они всё равно закроют окошко целиком. Значит, их длина не меньше 18 см. Если их длина ровно 18 см, то они будут закрывать окошко целиком в любом положении: их правый конец всегда будет за отметкой 18 см, а левый – не дальше отметки 2 см.

18. *В конце учебного года шестиклассник Ваня посчитал количество замечаний в своём дневнике за 6-й класс. Их оказалось 50. Ваня заметил, что с каждым годом количество замечаний возрастает на одно и то же число. Сколько замечаний получит Ваня за все 11 лет учёбы в школе, если эта закономерность будет продолжаться? Укажите все возможные ответы.*

Всего классов 11, 6-й класс расположен как раз посередине. Пусть каждый год замечаний становилось на x больше. Тогда в 5-м классе замечаний было $50-x$, а в 7-м – $50+x$, то есть за 5-й и 7-й класс вместе Ваня получил 100 замечаний. Аналогично, в 4-м классе было $50-2x$ замечаний, а в 8-м – $50+2x$ замечаний, то есть суммарно за 4-й и 8-й класс – тоже 100 замечаний. Точно так же получаем, что по 100 замечаний Ваня получил за 3-й и 9-й классы, за 2-й и 10-й, и за 1-й и 11-й. Всего замечаний набирается $50+100+100+100+100+100=550$.

19. *В середине Сашиной линии метро есть две станции с похожим интерьером: «Зелёная» и «Лесная». Саша раз в месяц ездит на важное занятие на «Лесную» через «Зелёную». Но каждый раз получается так: Саша зачитывается новым номером «Квантика», не слышит объявлений диктора и оказывается перед дверями вагона, которые через несколько секунд закроются, не зная, где он – на «Зелёной» или на «Лесной». Как лучше поступать Саше, чтобы в среднем он тратил меньше времени: выходить или ехать до следующей станции?*

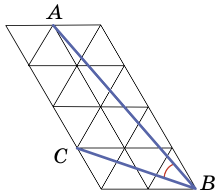
Поезда ходят в обе стороны с промежутком в 3 минуты, время в пути между соседними станциями – тоже 3 минуты.

Если Саша выйдет из вагона, то в лучшем случае он окажется на «Лесной», а в худшем – на «Зелёной». В первом случае он не потратит лишнего времени, а во втором случае ему надо будет подождать следующего поезда (лишние три минуты). Итого в среднем он потратит лишние 1,5 минуты.

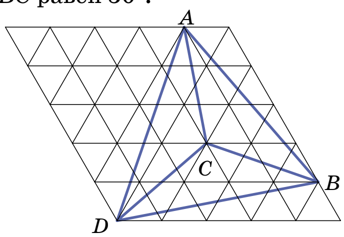
Если Саша проедет дальше, то в лучшем случае он проехал «Зелёную», а в худшем – проехал нужную ему «Лесную». В первом случае он не потратит лишнего времени, а во втором случае потратит лишние 6 минут только на проезд от «Лесной» до следующей станции и обратно и ещё в среднем 1,5 минуты на ожидание поезда. Итого в среднем он потратит лишние 3,75 минуты.

В итоге лучше выходить сразу.

20. *На бумаге «в треугольную клеточку» нарисован рисунок. Найдите величину угла ABC. (У треугольников-клеточек все углы равны по 60°. При решении вам может пригодиться такой факт: сумма углов любого треугольника равна 180°.)*



Отметим точку D, как показано на рисунке. Из рисунка видно, что отрезки AB, BD и DA равны (они построены «по клеточкам» одинаково), и отрезки CA, CB и CD тоже равны (по той же причине). Тогда ABD – равносторонний треугольник, разрезанный на три одинаковых равнобедренных треугольника. Углы равностороннего треугольника равны 60°. Значит, угол ABC равен 30°.



НЕЗЕМНАЯ КРАСОТА («Квантик» № 5, 2015)

Земля примерно в пять раз ближе к Солнцу, чем Юпитер. Значит, смотря на Юпитер с Земли (или с её орбиты), мы смотрим на него почти со стороны Солнца, и поэтому освещённую часть Юпитера мы должны увидеть почти целиком. А на одном из фото видна лишь примерно половина поверхности Юпитера, освещённой Солнцем. Поэтому такое фото можно получить лишь вдали от Земли.

ЧУДАК-ЧАСОВЩИК

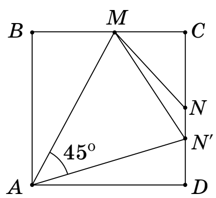
Решение задачи о модифицированных чудаковатых часах.

Эта задача намного проще первой, и её можно решить вообще без сложных вычислений. Как мы уже знаем из предыдущих статей про стрелки, они совпадают каждые $\frac{12}{11}$ часа. Легко видеть, что после каждого обмена скоростями стрелки «стартуют» из *правильного положения*, но скорости их правильны не всегда, а лишь каждый нечётный период длиной $\frac{12}{11}$ часа. Каждый чётный период на модифицированных часах минутная стрелка совпадает с часовой на правильных часах, а часовая – с минутной на правильных часах. Поэтому в чётном периоде чудаковатые часы покажут правильное время только тогда, когда стрелки совпадут, то есть лишь в начальный и конечный моменты. Так как за полсуток имеется всего 11 периодов (нечётное количество!), то и здесь одной половиной суток не обойтись. Таким образом, часы показывают правильное время в течение 11 промежутков (включая, естественно, и их концы): от 0 часов до $\frac{12}{11}$ часов; от $\frac{24}{11}$ до $\frac{36}{11}$ часов; от $\frac{48}{11}$ до $\frac{60}{11}$ часов; ...; от $\frac{240}{11}$ до $\frac{252}{11}$ часов.

УГОЛ В КВАДРАТЕ

Упражнение 1. Идея решения такая: если зафиксировать точку M, то точка N определяется любым из условий 1–4 однозначно. Из этого будет следовать, что каждое условие выполнено *только в том случае*, если угол MAN равен 45°.

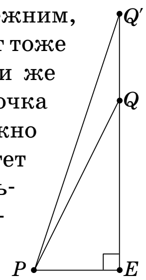
Итак, докажем утверждение, обратное утверждению 1. Пусть периметр треугольника MCN равен половине периметра квадрата. Отметим на стороне CD квадрата точку N' так, чтобы угол MAN' был равен 45° как на рисунке справа. По утверждению 1, периметр треугольника MCN' равен половине периметра квадрата. Значит, периметры треугольников MCN и MCN' совпадают. Если точка N' дальше от вершины C, чем точка N, то $CN'>>CN$ и $MN'>MN$. Другими словами, периметр треугольника MCN' больше периметра треугольника MCN – противоречие. Если N' ближе к C, чем N, то периметр MCN' меньше периметра MCN. Поэтому $N=N'$ и, значит, угол MAN равен 45°.



Перейдём к утверждениям 2 и 3. Если выполнено условие 2, то выполнено условие 3, как легко видеть. Поэтому достаточно вывести равенство $\angle MAN=45^\circ$ из условия 3 (тогда из условия 2 это равенство будет следовать автоматически).

Итак, пусть окружность с центром A и радиусом, равным стороне квадрата, касается стороны MN. Как и раньше, отметим на стороне CD точку N' так, чтобы угол MAN' был равен 45°. По утверждению 3, MN' касается той же окружности. Однако к любой окружности из точки снаружи можно провести только две касательных. Для точки M это прямая MB и прямая MN, которая совпадёт с прямой MN'. Значит, $N=N'$ и, значит, угол MAN равен 45°.

Наконец, перейдём к утверждению 4. Как и раньше, отметим на стороне CD точку N' так, чтобы угол MAN' был равен 45°. Точку пересечения AN' с BD обозначим через Q'. По условию 4, из отрезков BP, PQ' и $Q'D$ можно составить прямоугольный треугольник с гипотенузой PQ'. Если точка Q' ближе к вершине D, чем точка Q, то $PQ<PQ'$ и $QD>Q'D$. Это противоречит тому, что если в прямоугольном треугольнике один катет оставить прежним, а гипотенузу увеличить, то второй катет тоже увеличится (см. рисунок справа). Если же точка Q' дальше от вершины D, чем точка Q, то $PQ>PQ'$ и $QD<Q'D$, что невозможно по аналогичной причине (если один катет оставить прежним, а гипотенузу уменьшить, то второй катет тоже уменьшится). Значит, $Q=Q'$, $N=N'$ и угол MAN равен 45°.



Упражнение 2. Если перегнуть квадрат по диагонали BD, то точки C и A совместятся, а значит, угол PCQ совместится с углом PAQ. Поэтому угол PCQ тоже равен 45°.

Упражнение 3. Как уже отмечалось, при перегибании по прямой AP прямая PQ переходит в прямую EP. В частности, перпендикуляр, опущенный на PQ из точки A, перейдёт в равный ему перпендикуляр, опущенный на прямую EP. Значит, точка A равноудалена от прямых PQ и EP. С помощью перегибания по прямой AQ получаем, что расстояния от точки A до прямых PQ и EQ тоже равны. Поэтому окружность с центром в A и радиусом, равным расстоянию до прямых PQ, EP и EQ, касается стороны PQ и продолжений сторон EP и EQ треугольника PEQ, то есть это вневписанная окружность треугольника PEQ.

Упражнение 4. По утверждению 6, в треугольнике AQM угол AQM прямой, а угол MAQ по условию равен 45°. Значит, угол AMQ тоже равен 45° (по сумме углов треугольника), то есть треугольник AQM равнобедренный: $AQ=MQ$. Аналогично доказывается, что $AP=NP$.

Упражнение 5. По утверждению 6, NP и MQ – высоты треугольника AMN; AE – третья его высота. Но, как известно, прямые, содержащие высоты любого треугольника, пересекаются в одной точке.

Решения задач 8 и 9, а также много других интересных и сложных задач по этой теме ищите в статье А. Блинкова и Ю. Блинкова «Угол в квадрате» в «Кванте» №4 за 2014 год.

БЕТХОВЕН, ДУРОВ И ДИРИХЛЕ

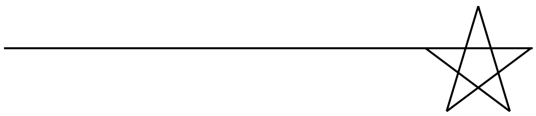
Бетховен действительно оглох в конце жизни, и «Лунная соната» у него была, но вот всё остальное неправда. Ведь он никак не мог услышать мяуканье кошки за спиной.

ПЯТЬ ЗВЁЗДОЧЕК

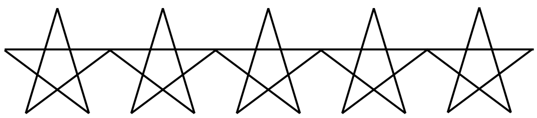
Понятно, что сократить время ровно на полсекунды или полторы секунды не получится: так как каждый отрезок требует 0,2 секунды, то суммарное время должно быть кратно этой величине. Но оба указанных значения можно превзойти! Укажем, как.

Первый способ состоит в том, чтобы провести сначала слева направо горизонтальный отрезок, который по длине впятеро превосходит горизонтальный отрезок каждой звёздочки:

А теперь, продвигаясь справа, сначала подрисовываем четыре отрезка, получая первую звёздочку:

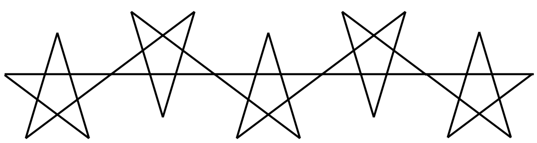


Потом таким же способом добавляем ещё четыре звёздочки, доведя их число до пяти:



Сколько же отрезков нам пришлось начертить? Сначала один длинный (но время изображения одного отрезка неизменно!), затем ещё 5 раз по 4. Итого – 21 отрезок, и затраченное время составит $0{,}2 \times 21 = 4{,}2$ секунды – экономия времени заметно превосходит полсекунды! Более того – здесь можно даже (теоретически, конечно) добиться, чтобы звёздочки были правильными.

Чтобы ещё уменьшить время, обратим внимание на то, что при переходе от каждой звёздочки к следующей мы вынужденно делаем «излом» траектории. Но можно без него обойтись, если вторую и четвёртую звёздочки нарисовать в перевёрнутом виде, в результате чего получится такая картинка:



Такой подход позволяет обойтись всего лишь 17-ю отрезками и уложиться в $0{,}2 \times 17 = 3{,}4$ секунды. Экономия времени здесь 1,6 секунды – больше, чем полторы!

Казалось бы, дальше ехать некуда. Но, оказывается, полученный результат можно существенно улучшить. Попробуйте! Пример мы опубликуем в следующем номере.

О ЧИСЛЕ 2015

Упражнение 1.

$1006+1005+1004+1003-1002-1001=2015;$

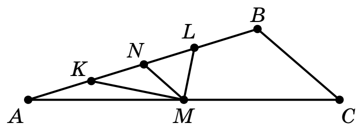
$5 \cdot 403 \cdot (2-1)=2015;\ 4 \cdot 503+1+2=2015.$

XXXVI ТУРНИР ГОРОДОВ. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Ответ: можно.

Покрасим верхнюю грань в первый цвет, нижнюю – во второй, а остальные четыре – в третий.

2. Пусть N – середина стороны AB. Тогда N будет одновременно и серединой KL. При этом MN будет средней линией треугольника BAC, и значит, её длина равна $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}KL$. Получается, что точка M лежит на окружности с центром в точке N и диаметром KL, то есть угол KML опирается на диаметр – а такой угол, как известно, прямой.



3. Ответ: могли.

Сумма первых n последовательных чисел $1+2+\ldots+n$ равна $n(n+1)/2$. Сумма десяти последовательных степеней двойки $2^k+2^{k+1}+\ldots+2^{k+9}$ равна $2^k(1+2+\ldots+2^9)$. Но $1+2+\ldots+2^9=2^{10}-1$ (это легко проверить, прибавив к обеим частям равенства 1: в левой части $1+1$ превратится в 2, затем $2+2$ – в 4, и так далее). Получается, что должно выполняться равенство: $n(n+1)/2 = 2^k(2^{10}-1)$, то есть $n(n+1)= 2^{k+1}(2^{10}-1)$. Возьмём $n=2^{10}-1$, тогда $n+1=2^{10}=2^{k+1}$, то есть $k=9$.

Получили пример: $2^9+\ldots+2^{18}=2^9(2^{10}-1)=1+2+3+\ldots+(2^{10}-1)$.

4. Ответ: на 15 квадратов.

Очевидно, крайние левые клетки двух разных строк не могут принадлежать одному квадрату. Значит, квадратов не меньше 15. Пример с 15 квадратами приведён на рисунке.

5. Ответ: для любых.

Расположим числа так:

…, 6, 4, 2, n, 0, 2, 4, 6, …, 5, 3, 1, n, 1, 3, 5, …

(сначала стоят в убывающем порядке все чётные положительные числа, меньшие n, потом n, 0, те же чётные числа в возрастающем порядке, далее все нечётные, меньшие n, – в убывающем порядке, потом n и те же нечётные числа в возрастающем порядке).

Тогда между единицами стоит одно число n, и между каждой следующей парой нечётных чисел (меньших n) добавляется по два числа. Аналогично, между двойками стоят два числа n и 0, и между каждой следующей парой чётных чисел (меньших n) добавляется по два числа. А межу числами, равными n, находятся все числа, меньшие n, начиная с 0, – то есть как раз n чисел (0, 1, 2, …, $n-1$).