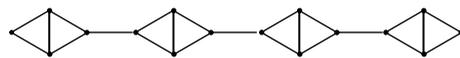


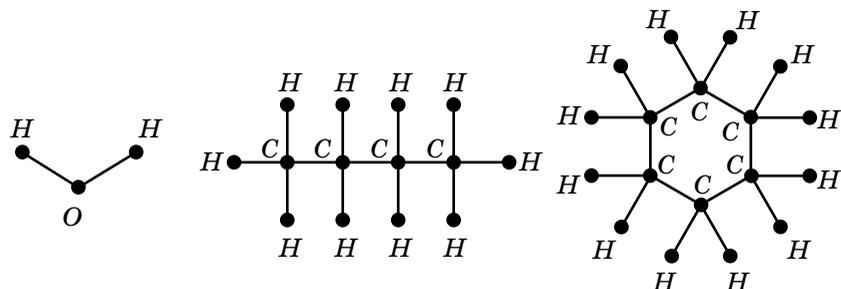
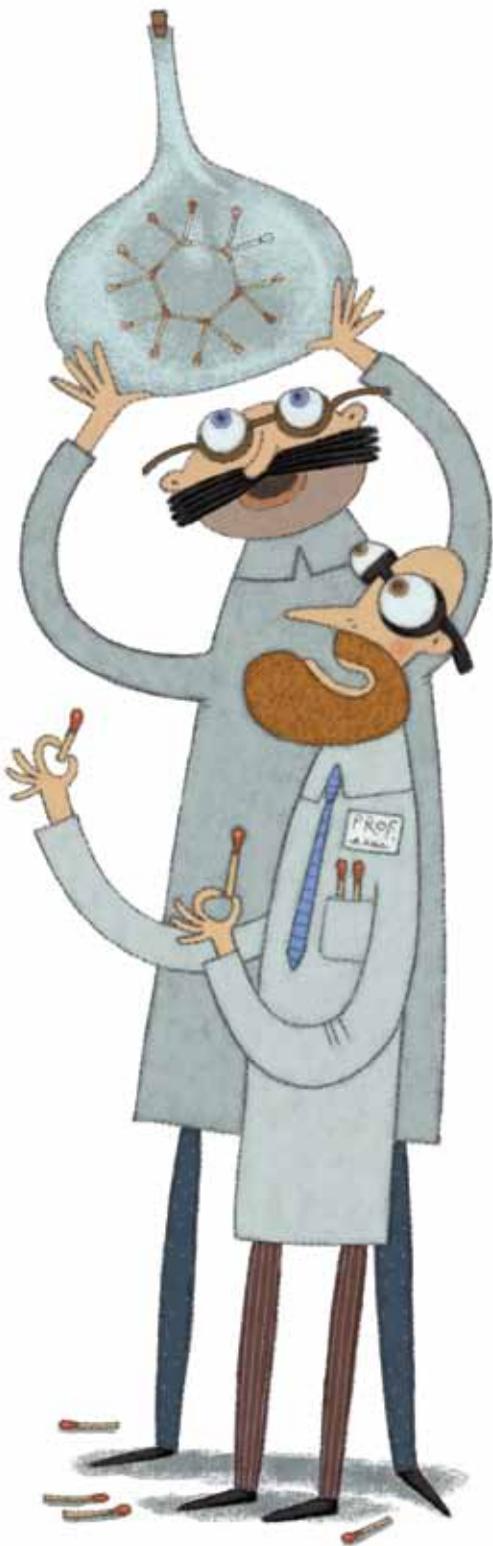
СПИЧЕЧНЫЕ ГРАФЫ



В «Квантике» №10 за 2014 год мы рассказывали о гороховом конструкторе. Надеемся, что ты, дорогой читатель, построил множество многогранников, замков, мостов и других замечательных вещей.

А знаешь ли ты, что с помощью гороха и зубочисток строятся красивые и ажурные графы на плоскости, да и сами задачи теории графов изучаются веселее? Слово «граф» в математике означает картинку, где нарисовано несколько точек, некоторые из которых соединены отрезками или дугами. Точки называются вершинами графа, а отрезки (дуги) – его рёбрами. В нашем случае вершины – горошины, прямые рёбра – зубочистки. В ходе конструирования получают элегантные и прочные конструкции.

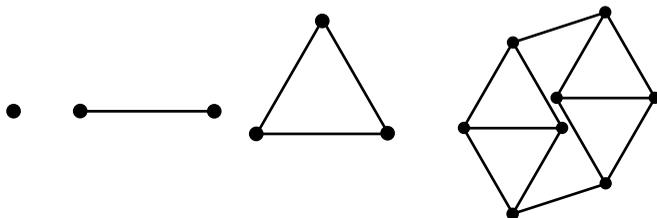
Методы теории графов завоевали признание не только математиков, но и инженеров, экономистов, психологов, лингвистов, биологов, химиков. Последние часто с помощью графов изображают молекулы различных веществ. Попробуй построить сам, например, молекулы воды, бутана и циклогексана:



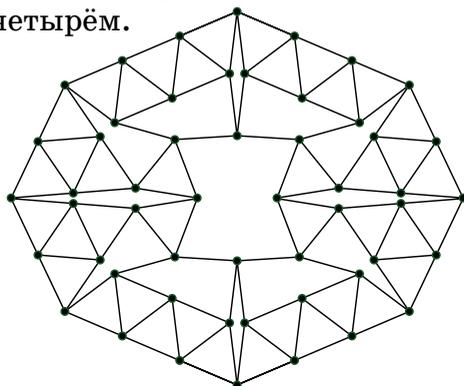
Ты уже заметил, что все рёбра этих трёх молекулярных графов имеют одинаковую длину и не пересекаются? Такие графы в математике называются спичечными. Получили они своё название, потому что легко выкладываются на плоскости с помощью спичек.

Построить спичечные графы несложно. В конце прошлого века появилось большое число математических результатов по спичечным графам, которые во многом связаны с такими характеристиками, как количество вершин, набор степеней и другие.

Степенью вершины называется количество выходящих из неё рёбер. Если все степени у графа одинаковые, то он называется *регулярным*. Ниже изображены регулярные спичечные графы степени 0, 1, 2 и 3, соответственно.

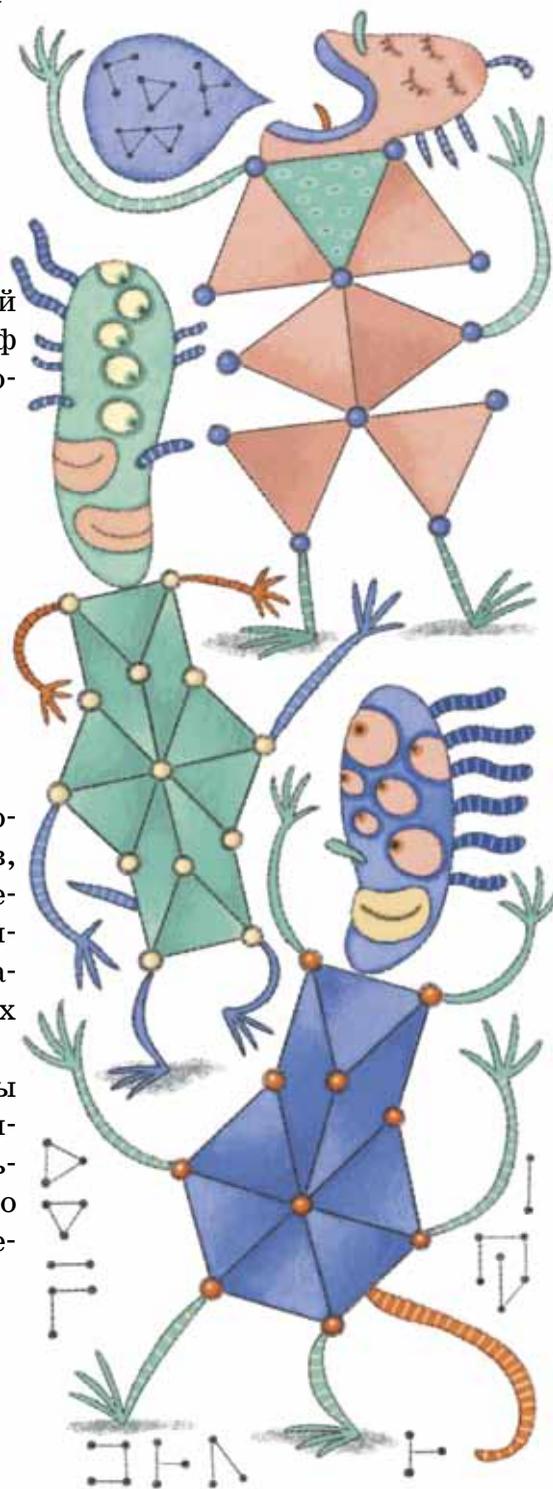
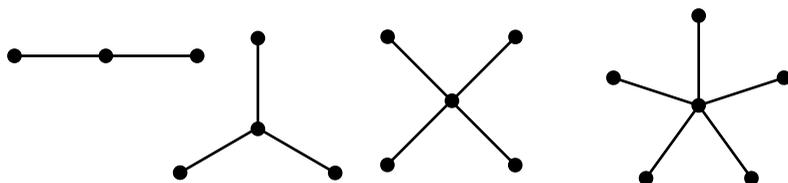


В 1986 году Хейко Харборт нашёл регулярный спичечный граф, который получил его имя – граф Харборта. В нём 104 ребра и 52 вершины, степени которых равны четырём.



Интересной математической задачей является поиск наименьших спичечных графов, то есть графов, обладающих наименьшим количеством вершин и имеющих наперёд заданный набор степеней. Из приведённых выше регулярных графов про первые четыре доказано, что они наименьшие. А регулярных спичечных графов степени 5 и выше не существует.

Рассмотрим спичечные графы, у которых вершины имеют два различных значения степени $\{m, n\}$. Наименьший спичечный граф со степенями $\{0, n\}$ – это объединение одной вершины и наименьшего спичечного графа степени n . Наименьший спичечный граф со степенями $\{1, n\}$ – это граф-звезда с $n + 1$ вершинами.

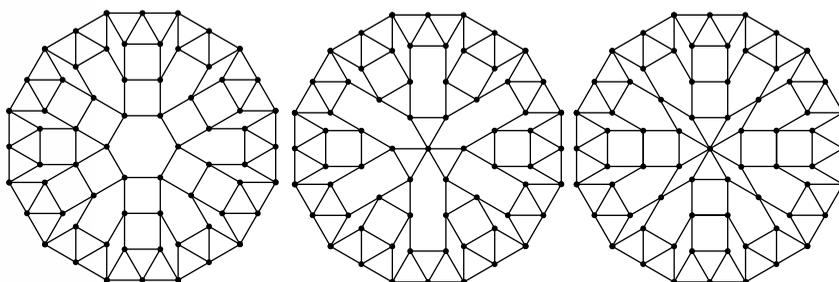


Ниже в таблице представлены наименьшие известные спичечные графы со степенями $\{m, n\}$:

$m \setminus n$	3	4	5	6	7	8
2						
3						

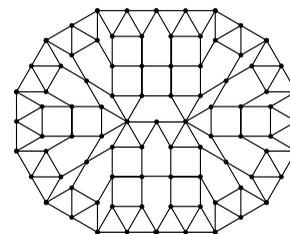
Минимальность графов из первой строки доказана. Попробуйте продолжить эту строку – постройте для каждого $n = 9, 10, 11, \dots$ граф со степенями $\{2, n\}$.

Посмотрите, как красивы наименьшие известные спичечные графы со степенями $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$:

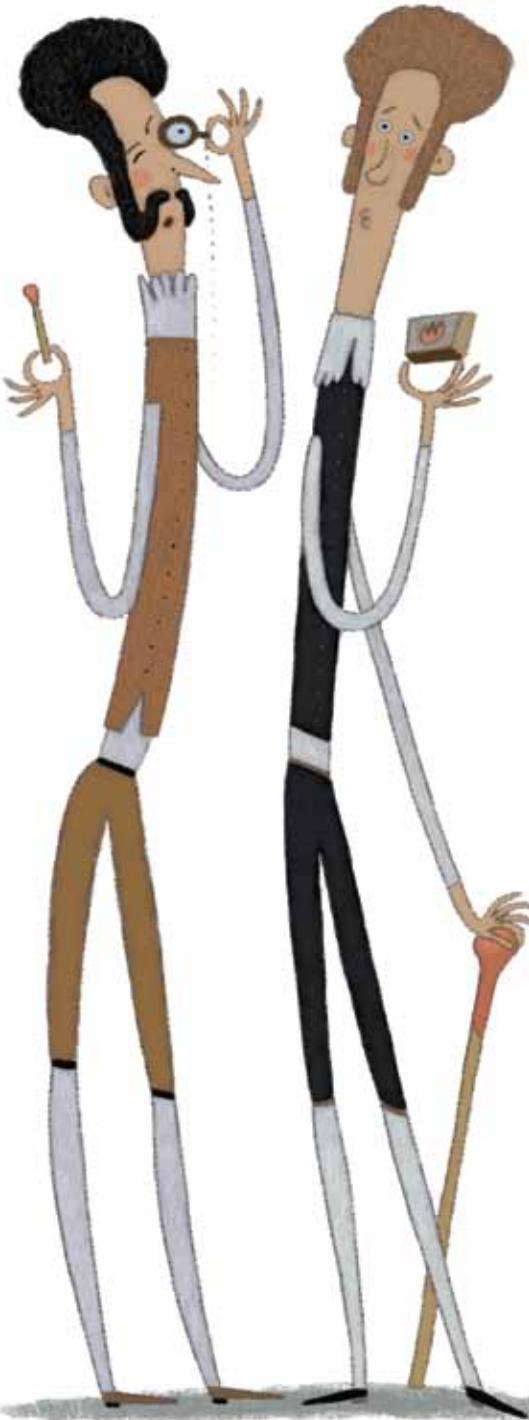
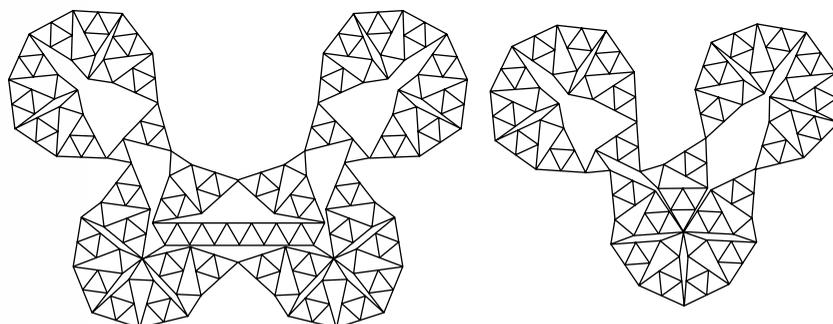


Кстати, попробуйте-ка быстро отыскать на первом из этих графов вершину степени 5.

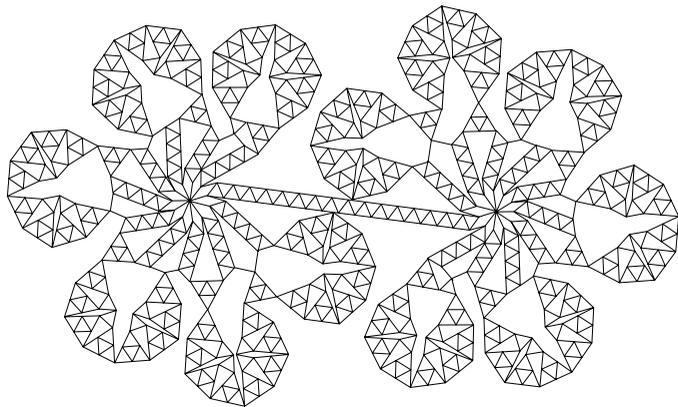
Гэвин Теобальд нашёл наименьший известный спичечный граф со степенями $\{4, 7\}$:



Перед вами примеры наименьших известных спичечных графов со степенями $\{4, 9\}$, $\{4, 10\}$, $\{4, 11\}$:



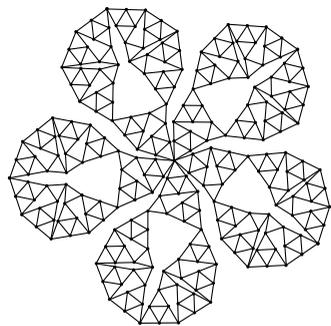
СМОТРИ!



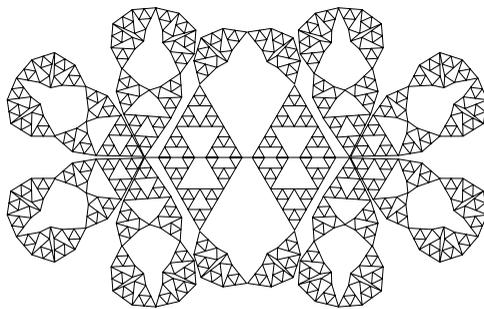
Спичечный граф со степенями $\{4,12\}$ пока не найден. Возможно, что при $n \geq 12$ спичечных графов со степенями $\{4, n\}$ нет. А вот графов со степенями $\{m, n\}$, где m и n больше 5, точно не существует.

Имеются и другие задачи со спичечными графами, причём как на плоскости, так и в пространстве¹. И многие вопросы ещё остаются открытыми. Замечательно, что такое простое занятие, как конструирование из гороха, позволяет прикоснуться к серьёзным проблемам, которые волнуют современных математиков.

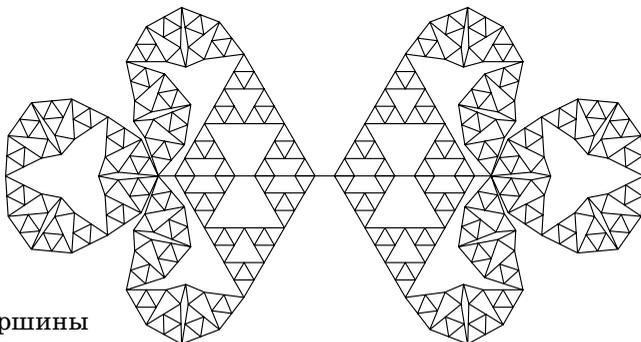
Напоследок приведём несколько не минимальных, но очень красивых спичечных графов.



$\{4,10\}$, 260 вершин



$\{4,9\}$, 806 вершин



$\{4,9\}$, 404 вершины



Heiko Harborth

¹Подробнее о других задачах на спичечных графах можно прочитать на сайте: <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html>

Художник Елена Цветаева