НАШ КОНКУРС («Квантик» № 6)

26. *Можно ли умножить число* 101001000100001 *на другое целое число так, чтобы среди цифр произведения не было нуля?*

Ответ: да, можно умножить, например, на 11111.

Наше число состоит из единиц, между которыми идут «дырки» из нулей, причём в самой большой дырке – четыре нуля. Умножим наше число на 11111 в столбик, для этого надо будет сложить пять чисел: само число, оно же, сдвинутое на разряд, и так далее. Сдвигая число на разряд, мы будем «закрывать» дырки, и закроем их все, так как сдвигов будет как раз четыре. И при сложении пяти чисел, состоящих из 0 и 1, не произойдёт «перескока» через разряд, то есть новые нули не появятся.

$$\begin{array}{r} \times\ 101001000100001 \\ 11111 \\ \hline 101001000100001 \\ 101001000100001 \\ +\ 101001000100001 \\ 101001000100001 \\ 101001000100001 \\ \hline 1122222112111111111 \end{array}$$

Оказывается, можно добиться существенно большего – умножить наше число (да и вообще, любое число, не делящееся ни на 2, ни на 5) на другое так, что в итоге не просто нулей не будет, а получится число из одних единиц! Это непростая задача.

27. *Сто одинаковых шкатулок расположены в один ряд. В одной из шкатулок находится бриллиант. На каждой шкатулке сделана надпись: «Бриллиант лежит в соседней шкатулке (слева или справа)». Известно, что ровно одна надпись из ста правдивая, а все остальные – ложь. Разрешается открыть ровно одну из шкатулок. Можно ли открыть такую шкатулку, чтобы после этого точно узнать, где лежит бриллиант?*

Ответ: да, достаточно открыть крайнюю шкатулку.

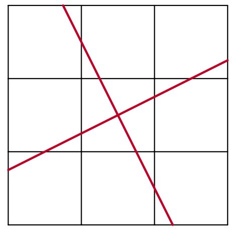
Если шкатулка с бриллиантом лежит не с краю, то на двух соседних с ней шкатулках написано верное утверждение, что противоречит условию. Значит, бриллиант в одной из двух крайних шкатулок. Если открыть одну из них, то либо мы увидим в ней бриллиант, либо узнаем, что бриллиант в другой шкатулке.

28. а) *Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки доски* 3×3*? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)*

б) *Та же задача для доски* 4×4.

а) **Ответ:** достаточно двух прямых.

Две прямые на рисунке разрезают все клетки квадрата.



Чтобы доказать, что одной прямой недостаточно, покажем, что прямая не может разрезать больше 5 клеток.

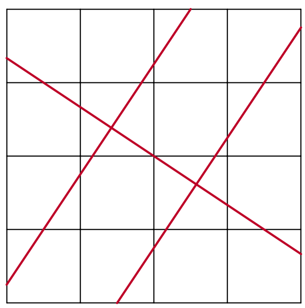
Наша доска 3×3 – это фактически клетчатая сетка, образованная четырьмя вертикальными и четырьмя горизонтальными линиями. Наша прямая, пересекаясь с этими линиями, разбивается на несколько отрезков. Концов у этих отрезков на один больше, чем самих отрезков. А всего концов не более шести: два конца лежат на границе доски, а внутри доски концов не более четырёх, потому что прямая пересекает не более двух внутренних вертикальных линий и не более двух внутренних горизонтальных.

б) **Ответ:** достаточно трёх прямых.

Аналогично пункту а) докажем, что прямая не может разрезать более 7 клеток. Прямая пересекает не более шести внутрених линий – три вертикальные и три горизонтальные, и ещё две крайние точки лежат на границе – всего получается не более восьми точек пересечения.

Значит, две прямые в сумме могут разрезать не больше 14 клеток, а всего клеток 16.

Пример трёх прямых, разрезающих все клетки квадрата, смотрите на рисунке.



29. *Петя, Коля и Вася решали задачи из задачника и решили вместе* 100 *задач, при этом каждый из них решил ровно* 60 *задач. Будем называть задачу, которую решили все трое, лёгкой, а задачу, которую решил только один из ребят, – трудной. Каких задач было больше, лёгких или трудных, и на сколько?*

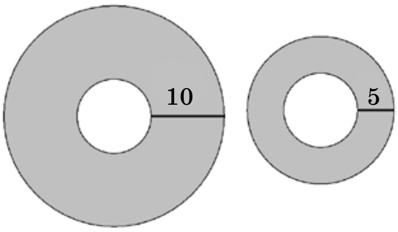
Ответ: трудных на 20 больше, чем лёгких.

Пусть было x лёгких задач, z трудных задач и y остальных («средних») задач. Всего задач 100, поэтому $x+y+z=100$.

Каждый из ребят решил по 60 задач, значит, всего решений 180. Ребята написали по 3 решения для каждой лёгкой задачи, по одному решению для каждой трудной и по два решения для каждой средней, поэтому $3x+2y+z=180$.

Домножая первое равенство на два и вычитая из него второе, получаем $z-x=20$.

30. *Тётя Маша купила рулон обоев радиуса* 15 *см на катушке радиуса* 5 *см (то есть толщина обоев на катушке равнялась* 10 *см). Она оклеила обоями половину стен в комнате, и толщина обоев стала равна* 5 *см (то есть рулон стал радиуса* 10 *см). «Ну что же, израсходовано полрулона, как раз хватит на вторую половину», – подумала тётя Маша. На какую часть стены на самом деле хватит ей оставшейся части рулона?*



Ответ: хватит лишь на 0,3 комнаты.

Длина рулона обоев – это примерно площадь поперечного сечения рулона, делённая на толщину обоев. Поэтому, чтобы узнать, какую часть рулона мы истратили, посчитаем, во сколько раз уменьшилась площадь поперечного сечения.

Сечение рулона – это кольцо, поэтому его площадь – это разность площадей кругов, ограниченных внешней и внутренней окружностями (напомним, что площадь круга радиуса r равна $\pi\cdot r^2$).

Площадь оставшегося рулона: $\pi\cdot(5+5)^2-\pi\cdot5^2=\pi\cdot100-\pi\cdot25=\pi\cdot75$. Первоначальная площадь: $\pi\cdot(5+10)^2-\pi\cdot5^2=\pi\cdot225-\pi\cdot25=\pi\cdot200$.

Получается, что у тёти Маши осталось лишь $\frac{75}{200}=\frac{3}{8}$ рулона. На половину комнаты ушло $\frac{5}{8}$ рулона. Значит, оставшегося хватит на $0{,}5\cdot\frac{3}{8}:\frac{5}{8}=0{,}3$ комнаты.

ЗЕРКАЛОЖКА («Квантик» № 7)

1. Мы уже знаем, что в вогнутом зеркале ложки мы увидим свои ноги сверху, а голову снизу. По тем же причинам справа мы в отражении увидим своё левое ухо (а слева – правое).

2. В продольном направлении поверхность ложки закругляется более плавно, чем в поперечном. Если вести взглядом вдоль ложки, поверхность, в которую будет упираться взгляд, а значит и отражение в ней, будет поворачиваться медленнее, чем если сдвигать взгляд поперёк ложки. Поэтому отражение, например, лица окажется вытянутым вдоль ложки: чтобы выйти за его пределы, вдоль ложки нужно сдвинуть взгляд на большее расстояние, чем поперёк неё.

3. Отражение в ложке кажется уменьшенным по тем же причинам, почему оно вытянуто вдоль ложки. Как мы раньше отметили, чем больше наклонена плоскость зеркала к лучу нашего взгляда, тем дальше от наших глаз будет то, что мы увидим в отражении. Поверхность ложки как бы состоит из множества маленьких плоских зеркал. Когда мы ведём взглядом по поверхности ложки, наклон этих зеркал сильно меняется – на десятки градусов на протяжении пары сантиметров. Это значительно быстрее, чем если бы мы вели взглядом по плоскому зеркалу. Поэтому мы успеваем увидеть большую часть отражения, незначительно сдвигая взгляд. Это и означает, что отражение кажется нам маленьким.

Добавим, что наши рассуждения правильные, только если мы не совсем близко от ложки. В этом случае можно пренебречь поворотом взгляда по сравнению с поворотом маленьких зеркал, чем мы и пользовались. Если же смотреть на ложку впритык, то можно увидеть даже увеличенное отражение глаза.

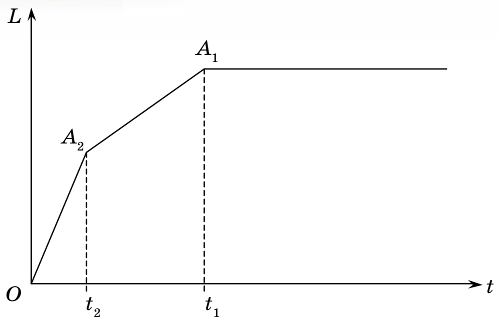
ДВЕ РАКЕТЫ («Квантик» № 7)

Поскольку ракеты летят строго навстречу, то есть по прямой, да ещё и с постоянными скоростями, то за каждую минуту расстояние между ними убывает на одну и ту же величину, численно равную сумме величин их скоростей, выраженных в км/мин. А что у нас? За последнюю минуту перед столкновением ракеты «покрыли», очевидно, остаток расстояния между ними, то есть 27 км, в течение 2-й минуты перед столкновением расстояние между ними уменьшилось на $45-27=18$ км, в течение 3-й минуты – на $57-45=12$ км, в течение 4-й – на $65-57=8$ км. Что-то несуразное: расстояния, которые должны быть одинаковы, становятся всё меньше. Мы вынуждены признать, что условие противоречиво, и потому решения просто нет. Однако... оно есть!

Подумаем: всегда ли за минуту расстояние между ракетами сокращается на одну и ту же величину? Например, ещё до старта оно вообще неизменно!

В самом деле – расстояние между ракетами не обязательно равномерно уменьшается со скоростью, равной сумме скоростей ракет. Такое справедливо, только если *обе* ракеты уже в полёте. Если же ракеты ещё не стартовали или в полёте лишь одна – то совсем другое дело! А ведь в условии ничего не сказано об одновременном старте. Вот тебе и раз – вместо жёстких рамок получаем бездну возможностей! Впрочем, не совсем бездну – вариантов не так уж много.

Для удобства анализа «обратим время вспять», то есть за начало отсчета примем момент столкновения ракет. Тогда если предположить, что первая ракета стартовала за t_1 минут до столкновения, а вторая – за t_2 минут до столкновения (для определенности $t_1>t_2$), то график зависимости расстояния L между ракетами от времени t, оставшегося до встречи, выглядит так:



Как видим, он представляет собой ломаную линию, проходящую через начало координат O (точку встречи), причем первая её часть OA_2 (самая крутая) соответствует полёту двух ракет, вторая часть A_2A_1 (более пологая) – полёту одной ракеты, и третья, правее точки A_1 (горизонтальная) – нахождению обеих ракет на стартовых площадках.

Чем мы располагаем для того, чтобы восстановить весь график? Данными в условии координатами четырёх точек: (1,27), (2,45), (3,57) и (4,65), да ещё началом координат (0,0), через которое ломаная просто обязана пройти. Несложно проверить, что эти точки могут располагаться на графике только так: точка (1,27) лежит на отрезке OA_2, точки (2,45) и (3,57) – на отрезке A_2A_1, а точка (4,65) – на горизонтальной линии правее A_1, и ломаная восстанавливается единственным образом. Точка, соответствующая моменту времени за 5 минут до столкновения, лежит на той же горизонтали, что и точка (4,65), только правее, вследствие чего расстояние между ракетами в этот момент такое же, как и за 4 минуты до столкновения, то есть 65 км.

Для особо любопытных сообщаем основные параметры графика (их легко получить, например, составив уравнения прямых): $t_1 = 11/3 \approx 3{,}67$мин, t_2=1,4 мин, а ордината точки A_2 составляет 37,8 км

ЧАСОВАЯ МЕДИАНА

Заметим такой факт: достаточно выбрать хотя бы одни часы, где неравенства для каждой стрелки – строгие. Тогда и сумма неравенств по всем часам окажется строгим неравенством для любой стрелки. Правда, для этого придётся отказаться от произвольного момента времени. Поэтому сначала выберем такое положение секундной стрелки на первых часах, чтобы она не лежала на прямой AM_1. Тогда получим, что сумма расстояний от центра стола до концов секундных стрелок будет больше расстояния от центра стола до центров циферблатов либо для выбранного положения секундной стрелки на первых часах, либо для противоположного ему. Выберем подходящее нам положение. Зафиксируем секундную стрелку, тогда для минутной стрелки на первых часах имеется 60 возможных положений на циферблате. Не более чем в двух из этих положений минутная стрелка лежит на прямой AM_1, выберем любое из оставшихся. Аналогично предыдущему, теперь мы можем добиться того, что сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок была больше, чем до центров циферблатов (возможно, заменив положение минутной стрелки на противоположное). Точно так же найдём и подходящее положение из 12 возможных для часовой стрелки. В результате на первых часах ни одна стрелка не лежит на AM_1, так что рассуждения мальчиков спасены!

УСКОРИТЕЛЬ РЕЗИНОВЫХ МЯЧИКОВ

Сделаем расчёт в общем случае. Пусть колонна из n мячей падает на пол, причём каждый мяч во много раз легче мячей, находящихся под ним. Пусть множитель для скоростей после удара равен k (упругому удару соответствует $k=1$).

Примем скорость падения мячей перед ударом за единицу. Будем на весь процесс смотреть, падая с этой скоростью. В момент отскока мы увидим, как на неподвижную колонну мелких мячиков налетает снизу пол. От него отскакивает нижний мяч колонны, который теперь будет играть роль пола. Потом от нижнего мяча отскакивает следующий, как от пола, и так далее до самого верхнего мяча.

Заметим, что от удара налетающего тяжёлого мяча (или пола) неподвижный лёгкий мяч улетает со скоростью, большей в $1+k$ раз (к скорости толкателя прибавляется скорость отскока мячика от него, меньшая в k раз). Применяя этот факт n раз, мы получаем, что мяч под номером n отлетит со скоростью $(k+1)^n$.

Переходя обратно в неподвижную систему, получаем, что n-й мячик отлетает со скоростью $(k+1)^n-1$.

В случае упругого удара $k=1$ и третий шар отлетит со скоростью $2^3-1=7$ и значит, поднимется на высоту в $7^2=49$ раз большую. Если же коэффициент восстановления скорости равен 0,8, скорость третьего мяча получится равной $1{,}8^3-1\approx 4{,}8$, а высота – равной $(1{,}8^3-1)^2\approx 23$.

АРХИМЕД, ЧАПЛИН, МОЦАРТ

История с Архимедом, конечно, выдумана. В те далёкие времена (две с лишним тысячи лет назад) ещё не было кранов с горячей водой. К тому же «эврика» – не имя, а греческое слово, означающее «нашёл». Именно это слово закричал Архимед, открыв свой настоящий закон (не такой, как здесь).

ФИГУРКА ИЗ ЛИСТА БУМАГИ

Повернём две горизонтальные части фигурки (рис. 1) относительно нижней стороны вертикального прямоугольника в разные стороны, как показано на рисунке 2. Мы получим прямоугольный лист бумаги (рис. 3). Чтобы обратно получить фигуру, нужно сделать три вертикальных разреза, как на рисунке 3, а затем повернуть части.

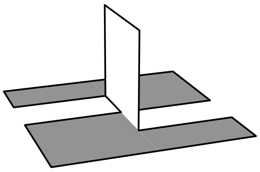
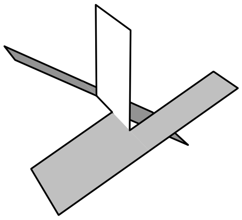
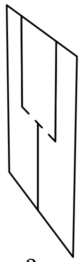




Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

СВЕТЯЩАЯСЯ ВОДА

Мы просили так расположить кружку, чтобы стенка над водой была практически вся в тени (свет лампы на неё не попадает). Однако под водой стена почему-то светлая. Кроме лампы освещать её может только свет от других частей кружки.На них падает свет лампы и отражается во все стороны (рассеивается). Если бы в кружке воды не было, то свет, рассеянный дном, осветил бы её стенки равномерно, без резких границ (рис. 1), а не как в нашем опыте, где под водой резко светлело.

Но в кружке с водой большая доля света, попав под воду, после отражения от дна не вылетает сразу на воздух, а отражается от воздуха обратно в воду (красные лучи на рисунке 2), и там становится светлее. В статье «Жидкое зеркало» («Квантик» №8 за 2013 год) мы разбирались с таким внутренним отражением.

Кроме того, на стенку начинает попадать немного света напрямую от лампы, преломлённого водой так, что он поворачивает к стене (зелёные лучи на рисунке 2).

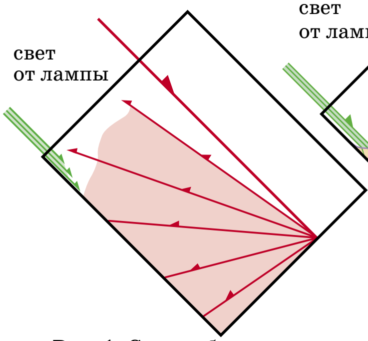


Рис. 1. Стакан без воды

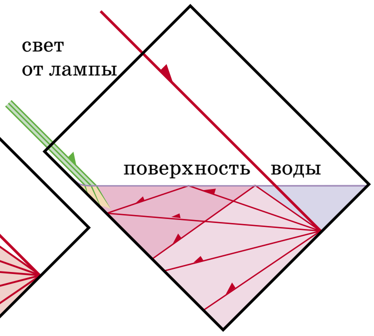


Рис. 2. Стакан с водой

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Глаголы *посадить* и *высадить* могут быть антонимами: автобус на остановке может *посадить* и *высадить пассажиров* – это два противоположных действия. Значит, утверждения (А) и (В) неверны. Глаголы *посадить* и *высадить* могут быть синонимами: можно *посадить маргаритки по краю клумбы* и *высадить маргаритки по краю клумбы* – в результате любого из этих действий клумба будет окаймлена маргаритками. Значит, утверждения (Б) и (Г) неверны. Верно лишь утверждение (Д): эти глаголы могут быть и синонимами, и антонимами. **Ответ:** (Д).

2. На первый взгляд кажется, что приведённые в задаче последовательности слов могут встретиться в русском тексте только в том малоправдоподобном случае, если в нём будет фигурировать персонаж по имени Приключение. Разумеется, заранее предугадать, после какого союза это имя будет встречаться чаще всего, никак нельзя, так что впору задуматься об ответе (Д).

Есть, однако, и другая возможность. По правилам, если название какого-либо произведения состоит из двух частей, разделённых союзом *или*, перед *или* ставится запятая, а вторая часть названия пишется с большой буквы, например: «Чёрная курица, или Подземные жители» (А. Погорельский). Самое известное произведение, удовлетворяющее условиям задачи, – это, конечно, сказка А. Н. Толстого «Золотой ключик, или Приключения Буратино». Вообще же произведений с двойным названием, вторая часть которого начинается со слова «Приключения...», очень и очень много. Вот некоторые из них: «Пелэм, или Приключения джентльмена» (Э. Бульвер-Литтон), «Путешествие по Южной Африке, или Приключения трёх русских и трёх англичан» (Ж. Верн), «Капитан Сатана, или Приключения Сирано де Бержерака» (Л. Галле), «Коралловый город, или Приключения Смешинки» (Е. Наумов), «Провинциальный детектив, или Приключения монахини Пелагии» (Б. Акунин).

Для союзов *а*, *и* и *но* никакого подобного правила указать нельзя. Таким образом, **ответ:** (В).

3. Бабка честила разбойника по алфавиту: сперва словами на букву *а*, потом – на букву *б*, потом – на букву *в*. Из перечисленных в ответах ругательств этому правилу больше всего соответствует *грешник*, поскольку это слово начинается со следующей после *в* буквы русского алфавита. **Ответ:** (Б).

Сюжет задачи навеян статьёй Б. Сарнова «Разбойник Мерзавио и редактор», опубликованной в сборнике «Редактор и книга» (М., 1962. Вып. 3). В этой статье рассказывается, как бдительный издательский редактор требовал от переводчика убрать из текста сказки все многочисленные ругательства, «кроме, может быть, двух-трёх самых безобидных». Мы, однако, нисколько не сомневаемся, что у читателей «Квантика» со здравым смыслом и чувством юмора всё в порядке.

4. Так в этих говорах назывался подорожник. Во всех названиях отражена одна и та же особенность растения – оно растёт вдоль дорог, там, где ходят люди. А вот сами слова, обозначающие дорогу, использованы разные: *дорога*, *тропа*, *путь*. **Ответ:** (А).