БЫСТРЕЕ, ВЫШЕ, СИЛЬНЕЕ! («Квантик» № 6)

«ВОЛЕЙБОЛ»

Команд, которые не одержали ни одной победы, не может быть больше одной. Ведь если таких команд две или более, то они сыграли друг с другом и какая-то одна из них победила (ничьих в волейболе нет). Противоречие. Итак, одна команда – это 20% от их общего числа. Значит, всего было 5 команд.

«БОРЬБА»

Да, могло! Упорядочим борцов по рейтингу от 1 до 9 (рейтинг 9 имеет самый сильный борец). Интуитивно понятно, что если требуемое разбиение на команды возможно, то команды примерно равны по силе. Попробуем разбить борцов на команды так, чтобы суммы рейтингов борцов из одной команды были равны. Сумма рейтингов всех борцов равна 45, то есть сумма рейтингов борцов одной команды равна 15. Задача похожа на составление магического квадрата 3×3. В нём сумма чисел по любой горизонтали, любой вертикали и любой диагонали равна 15. Итак, 1-я команда: (2, 7, 6),

2-я команда: (9, 5, 1),

3-я команда: (4, 3, 8).

Легко проверить, что условия задачи выполнены!

«ФУТБОЛ»

Да, это возможно! Приведём пример. Пусть всего было 16 команд, команда A выиграла 6 матчей, проиграла 9 матчей, а все остальные матчи закончились вничью. Тогда по новой системе подсчёта команда A получит $6\cdot3=18$ очков, а все остальные команды наберут 14 или 17 очков. По старой системе команда A получила бы всего $6\cdot2=12$ очков, при этом остальные команды 14 или 16 очков. Итак, команда A оказалась бы на последнем месте!

Примечание: подумайте при каком наименьшем числе команд возможна описанная в задаче ситуация.

«ФИГУРНОЕ КАТАНИЕ»

Прежде чем подсчитать средний балл, самую высокую и самую низкую оценку отбрасывают. Так у судей пропадает стимул намеренно завышать или занижать оценки выступающим!

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, I ТУР («Квантик» № 6)

1. Среди слов, включённых в «Грамматический словарь русского языка» А. А. Зализняка, условию задачи удовлетворяют следующие: **вакуумметр**, **военнообязанный (-ая)**, **геенна** («геенна огненная» – одно из наименований ада), **кристаллообразование**, **кристаллооптика**, **металлообработка**, **невоеннообязанный (-ая)**, **пароотгайка**, **посторонняя**. Есть такие слова и среди специальных терминов, например, **тааффеит** (название редкого минерала, первооткрывателем которого был граф Ричард Тааффе).

Строго говоря, в условии задачи не сказано, что искомое слово должно стоять в именительном падеже. Если этим требованием пренебречь, подходящих примеров окажется гораздо больше: (*по*) *аллее*, (*к*) *идиллии*, (*о*) *хоккее*... Но и искать их будет не так интересно.

2. Это Париж и Рига. А названия жителей, соответственно, *парижанин* и *рижанин*.

3. Перешеек (от слова *шея*).

4. Этот продукт – **йогурт**. Тюркское по происхождению слово *йогурт* в русском языке раньше могло писаться как *яурт* (в таком виде оно встречается, например, в «Толковом словаре живого великорусского языка» В. И. Даля и «Этимологическом словаре русского языка» М. Фасмера), *ягурт* и *югурт* (оба варианта отмечены, например, в словаре Д. Н. Ушакова). В качестве иллюстрации можно привести цитату из романа советского писателя Константина Федина «Первые радости»: «В городе был большой бульвар с двумя цветниками и с английским сквером, с павильонами, где кушали мельхиоровыми ложечками мороженое, с домиком, в котором пили кумыс и югурт». Что касается современного варианта *йогурт*, то он заимствован в относительно недавнее время из английского языка.

5. От порядковых числительных *второй*, *четвёртый* и *пятый* в русском языке **образованы названия дней недели**: вторник, четверг, пятница. Названия остальных дней недели (*понедельник*, *среда*, *суббота*, *воскресенье*) с числительными не связаны.

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 7)

31. а) *На большом клетчатом листе бумаги нарисовали «по клеточкам» квадрат* 100×100 *клеток. Сколько клеток к нему примыкает снаружи (соприкасается с ним хотя бы по вершине)?*

б) *Сказочный замок имеет форму большого куба, склеенного из одинаковых маленьких кубиков. Внутри замка часть кубиков убрали, и получилась пустая комната размерами* $10\times10\times10$ *кубиков. Сколько кубиков примыкает снаружи к этой комнате (соприкасается с ней хотя бы по вершине)?*

а) **Ответ:** 404.

К каждой из четырёх сторон квадрата 100×100 примыкают своими сторонами 100 клеток. К каждой из четырёх вершин квадрата примыкает одна клетка по вершине. Итого получаем $4\cdot100+4\cdot1=404$ клетки.

б) **Ответ:** 728.

В этом пункте можно по аналогии с предыдущим вычислить, сколько кубиков примыкает к стенам комнаты, к линиям, по которым соприкасаются стены, и к углам комнаты. Но можно решить задачу проще.

Все примыкающие к комнате кубики вместе с комнатой образуют заполненный куб $12\times12\times12$. Вырезав из него комнату, то есть куб $10\times10\times10$, мы как раз и оставим только кубики, примыкающие к комнате извне. Значит, таких кубиков будет

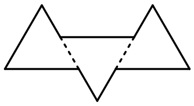
$$12\cdot12\cdot12-10\cdot10\cdot10=1728-1000=728.$$

32. *На входе в школу появилось объявление: «Директор школы категорически возражает против отмены решения о запрете контроля за причёсками». Может ли теперь Вася покрасить волосы в красный цвет без риска получить наказание от директора и почему?*

Ответ: да, может.

Если директор возражает против отмены запрета, то он поддерживает запрет контроля за причёсками. Другими словами, он против контроля за причёсками. То есть, с точки зрения директора, Вася может безнаказанно носить любую причёску.

33. *Нарисуйте фигуру с девятью сторонами, которую можно разрезать на три треугольника (и покажите, как сделать такое разрезание).*



На рисунке изображена фигура с девятью сторонами, которая разрезана пунктирными линиями на три треугольника.

34. *Барон Мюнхгаузен приехал к Квантику и Ноутику в гости и рассказал:*

– Однажды я встретил 15 детей и заметил, что у любых трёх из них вместе ровно 10 монет. Ответьте-ка, сколько монет у всех этих детей вместе?

– Это легко, – сказал Ноутик, – детей можно разделить на пять троек, а значит, всего монет 50.

– А я думаю, барон что-то путает, – сказал Квантик.

Кто прав – Квантик или Ноутик?

Ответ: прав Квантик.

Возьмём любых двух детей – скажем, Петю и Васю, – и докажем, что у них поровну монет. Рассмотрим ещё любых двух других детей – скажем, Толю и Колю. По условию, у Пети с Толей и Колей вместе 10 монет, и у Васи с Толей и Колей вместе 10 монет. Значит, у Пети и Васи монет поровну.

Раз у любых двух ребят монет поровну, то монет поровну у всех. Но тогда ни у каких трёх ребят не может быть вместе 10 монет – ведь 10 не делится на 3. Значит, утверждение барона Мюнхгаузена ложно.

35. *В наборе из 100 гирек любые две гирьки отличаются по массе не более чем на 20 г. Имеются чашечные весы, показывающие разность весов на чашах. Придумайте алгоритм, как разложить гирьки на две кучи, чтобы в каждой куче было по 50 гирек и чтобы масса первой кучи отличалась от массы второй кучи тоже не больше чем на 20 г (и докажите, что ваш алгоритм верный).*

Начнём раскладывать гирьки на две кучи. Сначала положим в каждую из куч по гирьке. В этот момент кучи не отличаются по массе более, чем на 20 г.

Взвешиваем кучи, перевесившую кучу называем тяжёлой, а другую – лёгкой (если на весах равенство, то называем кучи лёгкой и тяжёлой произвольно).

Берём следующие две гирьки, тоже взвешиваем их и называем перевесившую гирьку – тяжёлой, другую – лёгкой (в случае равенства называем гирьки тяжёлой и лёгкой произвольно).

Теперь кладём тяжёлую гирьку в лёгкую кучу, а лёгкую гирьку – в тяжёлую кучу. Превосходство тяжёлой кучи над лёгкой сократилось, или даже тяжёлая куча могла стать легче другой, но не более чем на 20 грамм, потому что массы добавленных гирь отличаются не больше, чем на 20 г. Поэтому кучи снова не будут отличаться по массе более, чем на 20 г.

Далее действуем по такому же алгоритму, добавляя гири парами, и в итоге получим нужные нам кучи.

ДОМИНОШКИ И НЕБОСКРЁБ («Квантик» № 8)

На рисунке из условия мы видим, что одна доминошка роняет примерно в полтора раза большую доминошку. Если обе доминошки увеличить в одинаковое число раз, то их падение будет происходит точно так же, только медленнее; строго мы это доказывать не будем, а лишь взовём к вашему чувству механики. То есть, в простейших приближениях, доминошка любого размера с неизменным успехом будет ронять доминошку, в полтора раза большую. Поэтому оптимально в нашей цепочке каждую следующую доминошку брать примерно в полтора раза больше предыдущей, что даёт на удивление малое количество доминошек.

Занумеруем доминошки подряд числами 1, 2, 3, ... Заметим, что каждая доминошка с нечётным номером больше предыдущей с нечётным номером в $1{,}5^2 = 2{,}25$ раза – увеличение происходит более чем в 2 раза. Приличный небоскрёб имеет высоту в пару сотен метров, а высота обычной доминошки – около 5 см. Значит, нужно увеличить высоту в $200/0{,}05 = 4000$ раз. Но $2^{12} = 4096$, а значит, достаточно 12-ти доминошек с нечётными номерами, и ещё будет на одну меньше доминошек с чётными номерами. Итого, нужны жалкие 23 доминошки!

Из-за сумасшедшей скорости роста доминошек в нашей цепи ответ слабо зависит от деталей. Например, если начать с доминошки в 3 см, каждую следующую делать всего в 1,3 раза больше и кончить километровой, большей любого небоскрёба, доминошек понадобится ненамного больше: всего 40.

ЛОГИКА ЛОГИКИ

Упражнение 1. Маша сказала, что ровно один из мальчиков рисовал на доске, а Вика сказала, что оба. Значит, их ответы не могут быть правдивыми одновременно, и кто-то из них соврал. Поэтому третья девочка, Лиза, точно сказала правду. Значит Вася не рисовал на доске, вторая девочка соврала, а доску на самом деле разрисовал Коля.

Упражнение 2. Предположим, что Вася не рисовал на доске, значит он должен говорить правду. Но он сказал, что они с Колей рисовали! Значит, он врёт, и на самом деле он рисовал на доске. А вот Коля на этот раз не рисовал. Наверное, поэтому он и насупился.

Упражнение 3. Петя сказал, что доску разрисовал кто-то один. Мы знаем, что он соврал. Поэтому доску разрисовали трое, двое или никто. Трое разрисовать доску не могли – ведь в этом случае Вася и Коля сказали бы правду. Если доску разрисовали двое, то это Вася и Петя, потому что два других варианта предложили Вася и Коля, но они соврали. Может быть вообще никто из этих мальчиков не рисовал на доске. В любом случае, Коля точно не рисовал.

ИНДЮКИ ПРОТИВ РЯБЧИКОВ

Ясно, что в банной задаче христиане являются аналогами цыплят (потому их следует поначалу отбросить), и нам придётся уравновешивать евреев турками. Каждый еврей заплатил за помывку 3 денги, что больше, чем 1 денга, на 2 денги. Каждый же турок дал 0,5 денги, что меньше, чем 1 денга, на 0,5 денги. Поэтому 1 еврей «эквивалентен» (с обратным знаком) $2:0,5=4$ туркам. Итак, на каждого еврея пришлось 4 турка. Всего это 5 человек, и заплатили они, как видим, $3+2=5$ денег. Поэтому можно дать ответ: в бане мылись 1 еврей, 4 турка, а остальные 15 – христиане.

Однако это ещё не всё! Здесь есть возможность поискать другие ответы. Синхронно увеличивая число евреев и турок вдвое или даже втрое, мы тоже добьёмся равенства людей и денег, что порождает ещё два ответа:

2-й ответ – 2 еврея, 8 турок и 10 христиан;

3-й ответ – 3 еврея, 12 турок и 5 христиан.

Дальнейшее увеличение недопустимо, потому что христиане пропадают (обращаются в 0 или даже «в минус»). Следовательно, задача Магницкого имеет ровно три решения, приведённых выше.

ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

6. Так как центр окружности должен быть равноудален от заданных точек, он является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC (рис. 1).

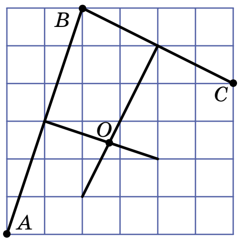


Рис. 1

7. Например, как на рисунке 2. В треугольнике ABC медианы AM и BN перпендикулярны.

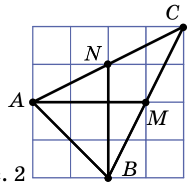


Рис. 2

8. Построим отрезок AP, равный и параллельный DQ (рис. 3). Тогда искомый угол равен углу PAE, то есть равен 45°, поскольку треугольник PAE – прямоугольный и равнобедренный.

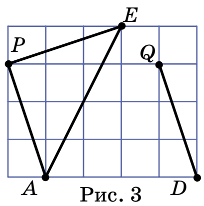


Рис. 3

9. Проведём отрезок DQ параллельно BN, тогда углы BPM, MDQ и MAN равны (рис. 4).

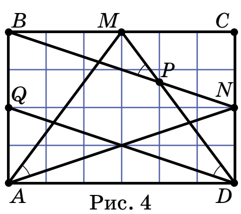


Рис. 4

10. Введём обозначения так, как показано на рис. 5, и построим угол KAE, равный углу BDC, и угол KAM, равный углу BEC. Тогда искомая сумма равна углу BAM, то есть равна 90°.

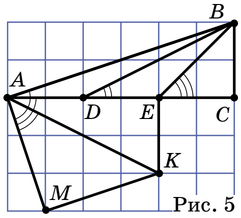


Рис. 5

11. Используем равенство двух пар треугольников: BAM и ADN, BCN и CDM, заменив углы с вершинами A и C на им равные (рис. 6). Тогда искомая сумма равна 90°.

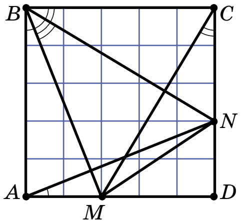


Рис. 6

КАКАЯ ПОЛОВИНА ВЕЛОСИПЕДА БЫСТРЕЕ?

Ни самокат, ни велосипед никогда не едут строго по прямой. Во-первых, есть повороты маршрута, а во-вторых, даже двигаясь прямо, вы всегда немного поворачиваете то вправо, то влево, чтобы держать равновесие. В результате переднее колесо едет по немного извилистому маршруту, а правое, тащась за ним, едет по сглаженному маршруту, проходя меньшее расстояние. Это объясняет случай самоката.

В случае велосипеда помимо описанного эффекта добавляется тот факт, что колёса под весом ездока сдавливаются неодинаково. Если велосипедист наклонится вперёд, большую нагрузку получит переднее колесо, оно больше сдавится, что уменьшает его эффективный радиус, и оно, пройдя тот же путь, сделает больше оборотов. Если ездок отклонится назад, сдавится заднее колесо. Если при этом ехать прямо, то заднее колесо сможет крутиться быстрее переднего, даже несмотря на то, что оно проходит чуть меньший путь.

ХОДЖА НАСРЕДДИН, ПАГАНИНИ И ПЁТР I

Ответ: История про Петра Первого – выдумка. На самом деле, баскетбол появился лет через двести после Петра (в 1891 году), в Америке.

ПРИКЛЮЧЕНИЯ НА СТАНЦИИ ДРУЖИНИНО

• Робот шёл от моста против течения реки, и поэтому то, что он считал левым берегом, было на самом деле правым. У речек левый и правый берега именуются по отношению к направлению течения.

• Костик назвал время прибытия поезда по местному времени, а расписание поездов составляется по московскому времени. Квантик подумал, что Костик назвал московское время, и сам тоже назвал московское. На Урале местное время опережает московское на 2 часа. Поезд прошёл через станцию Дружинино в 16 часов по московскому времени.

КОСТРОМСКИЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ПЯТИКЛАССНИКОВ

1. Ответ: 1799, 1889, 1979.

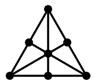
Если сумма первых трёх цифр равна 17, а последних трёх – 25, то последняя цифра больше первой на 8. Значит, первая цифра 1, а последняя 9. Средние две цифры мы вправе выбрать любыми, но с условием, что их сумма равна 16, то есть 7 и 9, 8 и 8, 9 и 7.

2. Ответ: $5+1\cdot7+0\cdot2\cdot6\cdot8\cdot9\cdot5=3\cdot4$

3. Ответ: 95413.

Перебирая две последние цифры, несложно найти все такие пятизначные числа: 85321, 74312 и 95413. Доказательство этого факта, а также того, что искомое число не может иметь больше пяти цифр, оставим в качестве упражнения.

4. Ответ: смотрите рисунок.



5. Жюри турнира стратегию не знает. Поиграйте!

6. Ответ: Иван живёт в Санкт-Петербурге и преподаёт химию, Дмитрий живёт в Киеве и преподаёт физику, Степан живёт в Москве и преподаёт биологию.

Дмитрий преподаёт не биологию, значит, физику или химию. Он живёт не в Санкт-Петербурге, где преподают химию. Значит, Дмитрий преподаёт физику. Москвич не преподаёт физику, поэтому Дмитрий живёт в Киеве.

Иван преподаёт не в Москве, а значит, в Санкт-Петербурге, причём химию.

Для Степана остался единственный вариант.

7. Ответы: а) нет; б) да, например: **130**, **310**, 103, 301; в) да, например: **230**, **320**, 203, **302**; г) да, например: **240**, **420**, **204**, **402**; д) нет.

Если среди цифр нет нуля, то чисел всего 6. Если чётных цифр нет, то все 6 чисел нечётные. Если одна цифра чётная, то 2 числа чётные. Если две цифры чётные, то 4 числа чётные. Если три цифры чётные, то все 6 чисел чётные.

Если среди цифр есть ноль, то чисел всего 4. Если две другие цифры чётные, то все 4 числа чётные. Если из остальных только одна цифра чётная, то чётных чисел будет 3. Если две другие цифры нечётные, то получаем 2 чётных числа.

8. а) **Ответ:** 28 рублей.

Условие в точности означает, что среди 10 монет есть хотя бы 8 достоинством 1 рубль. Чтобы сумма была побольше, две другие монеты должны быть достоинством 10 рублей.

б) **Ответ:** $4\cdot10+2\cdot5+2\cdot2+2\cdot1=56$ рублей.

Условие в точности означает, что монет двух любых достоинств в сумме не может быть больше 6. Поэтому шести монет одного достоинства быть не может. Пяти монет тоже, потому что тогда монет любого другого достоинства будет не более одной, а $5+1+1+1<10$.

Если найдутся 4 монеты одного достоинства, то монет каждого из остальных достоинств не более 2. Но $4+2+2+2=10$, значит, монет остальных достоинств ровно по 2.

Если монет каждого достоинства не больше 3, то есть два варианта: 3, 3, 3, 1 и 3, 3, 2, 2.

Чтобы посчитать максимально возможную сумму в каждом из трёх вариантов, нужно брать больше монет большего достоинства.

в) Из первого условия следует, что у Пети все монеты, кроме, быть может, двух, рублёвые. А из второго – что все его монеты, кроме, быть может, трёх, двухрублёвые. Поэтому из вытащенных пяти монет хотя бы три рублёвые и две двухрублёвые. Значит, это три рублёвые монеты и две двухрублёвые.

9. Ответ: 6. Папа с Витьком вместе вбили гвоздей на 4 полки. Дедушка вбил гвоздей не менее 10 и не более 14 – это больше чем на одну полку, но меньше, чем на три. Значит, добавляется ещё две полки.

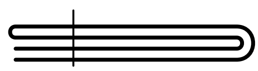
10. Ответ: 2 рыцаря и 2 лжеца.

Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. «Все мы – лжецы» не может быть правдой. Значит, первый – лжец, и людей больше трёх, а кроме того, среди них есть рыцарь. Тогда второй сказал правду – «Не все мы лжецы». Значит, второй – рыцарь, и всего людей 4. Третий соврал: «Нас тут пятеро». Значит, он – лжец, и лжецов не три. Двух лжецов мы уже нашли – это первый и третий.

11. Ответ: $9678+8769=18447$.

Пусть первое число записывается цифрами a, b, c и d в таком порядке. Тогда его сумма со вторым числом равна $1000a+100b+10c+d+1000d+100c+10b+$ $+a=1001(a+d)+110(b+c)=891(a+d)+110(a+b+c+d)$. Максимальное возможное значение $a+b+c+d$ – это $9+8+7+6=30$, потому что все цифры разные. Максимальное значение $(a+d)$ – это $9+8=17$. Максимум достигается, например, на числе 9678, которое подходит под все условия задачи.

12. Ответ: 28, 36 или 48 см.



У Витька получилось 5 кусков, как на рисунке. Среди этих кусков не больше трёх разной длины: однослойный кусок слева, двухслойный слева и двухслойный справа. Числа 4 и 10 можно присвоить указанным трём длинам четырьмя способами. Получаются три возможных длины ленты: $4\cdot4+2\cdot10=36$, $4\cdot10+2\cdot4=48$, $2\cdot4+2\cdot10=28$ и $2\cdot10+2\cdot4=28$.

13. Ответ: 16:02.

Подсчитаем количество изменений за сутки. Каждую минуту меняется самая правая цифра, каждые 10 секунд меняется вторая справа, каждый час меняется третья справа цифра, ну а первая цифра изменится 3 раза. Итого получаем $24\cdot(60+6+1)+3=1611$ изменений. Оставшиеся $2015-1611=404$ изменения произойдут за 6 часов 2 минуты: $404=2+6\cdot(60+$ $+6+1)$.

14. Ответ. Женские имена: Валентина, Александра, Марина, Надежда, Галина, Маргарита, Виктория, Ольга, Кристина.

Мужские имена: Александр, Владимир, Святослав, Эдуард, Евгений, Антон, Андрей, Павел.