НАШ КОНКУРС («Квантик» № 8)

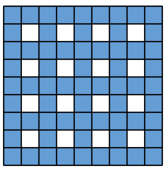
36. *В поход пошли 10 человек, младше всех остальных был Гриша. Он нашёл сумму возрастов остальных участников похода и поделил на сумму возрастов всех десяти человек. Мог ли Гриша получить число меньше, чем 0,9?*

Ответ: не мог.

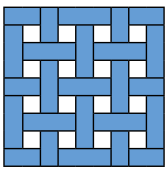
Пусть a – возраст Гриши, s – сумма возрастов остальных, S – сумма возрастов всех, то есть $S=a+s$. Если мы поделим возраст Гриши на сумму всех десяти возрастов, то получим число, не большее $\frac{1}{10}$, так как Гриша самый младший: $\frac{a}{S}\leqslant\frac{1}{10}$.

Гриша нашёл дробь $\frac{s}{S}$. Если к ней прибавить $\frac{a}{S}$, получится $\frac{a+s}{S}=\frac{S}{S}$, то есть единица. Но мы прибавили число, не большее $\frac{1}{10}$, а значит, найденная Гришей дробь не меньше $\frac{9}{10}$.

37. *Разрежьте нарисованную синюю клетчатую фигуру на несколько клетчатых прямоугольников так, чтобы среди них было как можно меньше квадратиков из одной клетки.*



Пример разрезания приведён на рисунке.



38. *Квантик и Ноутик показывают такой фокус. Зритель задумывает любые два разных целых числа от 1 до 25 и сообщает их только Ноутику. После этого Ноутик называет Квантику какие-то другие два числа от 1 до 25 (отличные от задуманных), и Квантик тут же угадывает задуманные зрителем числа. Предложите способ, как могли бы действовать Квантик и Ноутик, чтобы фокус всегда удавался.*

Расположим мысленно числа от 1 до 25 по кругу. Тогда если зритель загадал два не соседних числа A и B, пусть Ноутик называет число, идущее следом за A, и число, идущее следом за B (по часовой стрелке). Если же зритель загадал два соседних числа, пусть Ноутик указывает на следующие два соседних числа (по часовой стрелке). Зная эти правила, Квантик легко восстановит задуманные зрителем числа.

39. *а) На одной из сторон прямоугольника выбрали любую точку и соединили с вершинами противоположной стороны. Получился треугольник (синий на рисунке 1). Докажите, что площадь этого треугольника равна половине площади прямоугольника.*

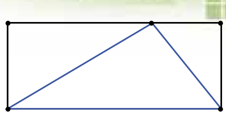


Рис.1

б) На рисунке 2 изображены два прямоугольника – один нарисован синим карандашом, а другой – красным. Докажите, что площади этих прямоугольников равны.

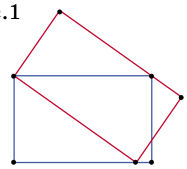
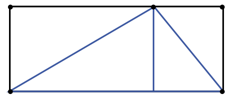
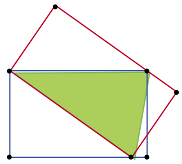


Рис.2

а) Опустим из выбранной точки перпендикуляр на противоположную сторону треугольника. Наш прямоугольник разобьётся на два, причём две из сторон треугольника будут диагоналями этих прямоугольников, а значит, поделят их пополам.



б) Рассмотрим зелёный треугольник на рисунке. По предыдущему пункту его площадь равна как половине площади синего прямоугольника, так и половине площади красного. Значит, площади прямоугольников равны.



40. *Пока Лиза и Вова, стоя на эскалаторе метро, поднялись наверх, их неутомимый друг Квантик на спор успел подняться, спуститься и снова подняться по этому же (едущему вверх) эскалатору. Бежал Квантик всё время с одной и той же скоростью. Во сколько раз эта скорость больше скорости эскалатора?*

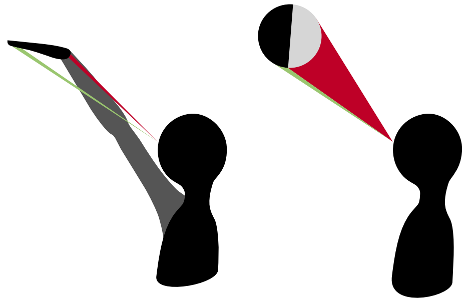
Примем длину исходного эскалатора за 1. Мысленно удлиним эскалатор в два раза. Тогда можно представить себе ситуацию так: Квантик добежал до конца эскалатора, а потом вернулся к его середине и там встретился с Лизой и Вовой.

Всё происходит на едущем эскалаторе, который одинаково смещает и Лизу с Вовой, и Квантика. С точки зрения эскалатора, Квантик отбежал на какое-то расстояние от неподвижных Лизы и Вовы, а потом вернулся к ним, и бежал всё время с одной скоростью. Поэтому время убегания Квантика от Лизы и Вовы равно времени его возвращения к ним. Значит, когда Квантик развернулся и побежал обратно, Лиза и Вова проехали половину пути до места встречи, то есть были на середине исходного эскалатора (не удвоенного). Квантик на этот момент пробежал (с помощью эскалатора) расстояние 2, а эскалатор продвинулся на $1/2$. Значит, без помощи эскалатора Квантик пробежал бы расстояние $2-1/2=3/2$, то есть в три раза больше, чем проехал эскалатор. Значит, скорость Квантика в три раза больше скорости эскалатора.

НЕБЫВАЛАЯ ЛУНА («Квантик» № 9)

Ноутик мог рассуждать так: раз на картине ночь, то Солнце должно быть ниже горизонта и, значит, Луна им должна быть освещена снизу, а не сверху. Тут ошибки нет. Но из того, что теневая часть Луны выше освещённой, не следует, что она окажется выше в *нашем поле зрения.*

Чтобы лучше понять этот момент, сделайте такой опыт. Вытяните руку как на рисунке. Хотя пальцы ладони *выше* её основания, в вашем поле зрения пальцы *ниже* запястья (зелёный луч ниже красного). Заменяя мысленно ладонь на далёкую Луну так, что пальцы соответствуют теневой стороне, а запястье – освещённой, вы получите пример Луны из задачи. Она ночная (освещённая сторона наклонена вниз, Солнце под горизонтом), но при этом мы видим теневую её сторону ниже освещённой.



ШКОЛЬНАЯ АЛГЕБРА В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

1. 12 и 5. **2.** 15. **3.** 9 и 7. **4.** 7 и 3. **5.** 11 и 5.

«САМАЯ ЛУЧШАЯ» ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА

2. Площадь квадрата равна $L^2/16$, что меньше площади круга, равной $L^2/4\pi$.

3. Окружность – это множество всех точек на плоскости, удалённых от данной точки (центра окружности) на фиксированное ненулевое расстояние.

Круг – это множество всех точек на плоскости, находящихся от данной точки (центра круга) на расстоянии, не большем заданного ненулевого расстояния.

4. Машина будет двигаться по окружности.

6. Здесь может быть много вариантов ответов, но наиболее широко признан такой: круглая крышка люка не может провалиться внутрь круглого отверстия, как бы её ни крутили. В то же время, например, квадратную или треугольную крышку можно было бы повернуть так, чтобы она прошла в квадратное или, соответственно, треугольное отверстие и провалилась в люк.

7. В принципе сгодилась бы и любая *фигура постоянной ширины*, то есть такая фигура, что в каком положении её в тисках ни зажми, расстояние между губками тисков («ширина» фигуры) будет одно и то же. Простейший пример – треугольник Рело – получается как пересечение трёх кругов, центр каждого из которых лежит на границах других двух.

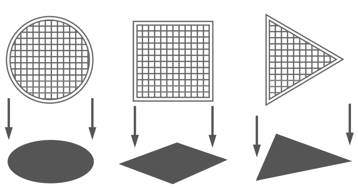


Рис. 1

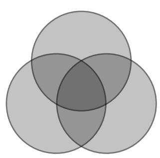


Рис. 2

НАЙТИ ПРИТВОРЩИКА

• *Волчок* издаёт воющие звуки и потому, как считает большинство исследователей, связан с *волком*. Эта связь остроумно обыгрывается в стихотворной сказке Б. Заходера «Волчок». *Курок* напоминает петуха или курицу клевательным движением; *коньки* (и на крышах, и лезвия) изготавливались в виде лошадок. А вот *пёс* и *песок* этимологически не связаны.

• Этимологически *воробья* нельзя связать с *вором*, как и *соловья* – с пением *соло*. Для слова *моросейка* есть однокоренное *моросить*, которое исключает второй корень «сей». А вот *суховей* – действительно слово с двумя корнями.

БОР, АЛЕКСАНДР МАКЕДОНСКИЙ И АЛЕКСАНДР I

История с Александром Македонским – выдумка. Великий полководец по имени Ганнибал действительно существовал, но родился он через 70 лет после смерти Александра Македонского. Кроме того, никаких амазонок не было. Эти женщины-воины существовали лишь в древнегреческих мифах.

ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Часть 2

7. *Первое решение.* Продлив отрезок BC на его длину за точку C, получим точку D (рис. 1). Тогда AC – высота равностороннего треугольника ABD, то есть угол ACB равен 90°.

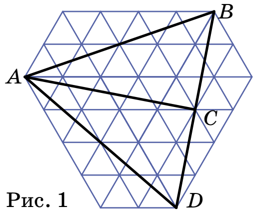


Рис. 1

Второе решение. Угол ACB можно найти, воспользовавшись решением задачи 1: докажите, что он равен углу BAD на рисунке 1б из статьи, который, в свою очередь, равен $60^\circ+30^\circ=90^\circ$.

8. Используем теорему Фалеса, смотрите рисунок 2.

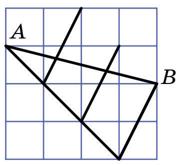


Рис. 2

9. Пример приведён на рисунке 3. Каждая из двенадцати отмеченных точек удалена от точки O на расстояние 5 клеток. Для четырёх точек это видно по линиям сетки, а для остальных восьми – следует из того, что прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 имеет гипотенузу 5 (*египетский треугольник*).

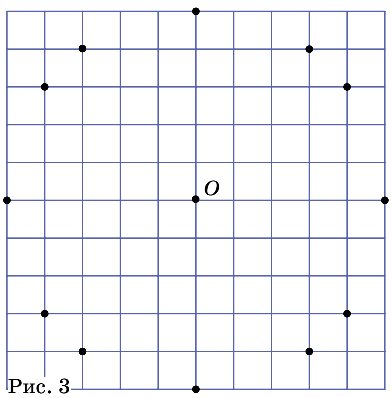


Рис. 3

Замечание. *Это решение позволяет строить окружность на клетчатой бумаге достаточно точно, не используя циркуля. Кроме того, количество точек, лежащих на одной окружности, можно увеличить, например, до 20, если взять лист бумаги побольше. Для этого можно выбрать радиус окружности, равный 25, и воспользоваться тем, что* $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$.

10. Отметим точку O (рис. 4). Заметим, что если соединить её с вершинами A, C и E, шестиугольник $ABCDEF$ разобьётся на три параллелограмма (докажите!). Так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, то площадь треугольника ACE равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.

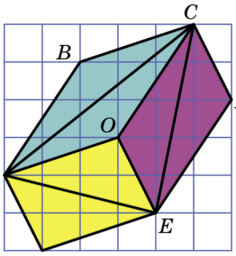


Рис. 4

Замечание. *Точка O – центр симметрии шестиугольника ABCDEF.*

11. *Первое решение.* Выберем любой квадрат размера 2×2 и проведём по одной диагонали в каждом из четырех прямоугольников 2×1 (рис. 5а). В центре образуется квадрат (как пересечение двух перпендикулярных полосок одинаковой ширины), он и будет искомым. Действительно, достроим полученную фигуру до «креста» из пяти равных квадратов. Так как площади закрашенных треугольников попарно равны, то площадь «креста» равна площади квадрата 2×2, поэтому площадь любого из квадратов креста равна $\frac{4}{5}$ площади клетки.

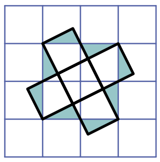


Рис. 5 *а*

Второе решение. Если провести внутри квадрата 6×6 чёрные линии, как показано на рисунке 5б, получится квадрат, разбитый на 25 маленьких квадратиков (докажите!). Площадь исходного квадрата равна 36. Площадь каждого закрашенного треугольника равна 4, как у половинки прямоугольника 4×2. Значит, площадь построенного квадрата равна $36 - 4 \cdot 4 = 20$. А площадь каждого маленького квадратика равна $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

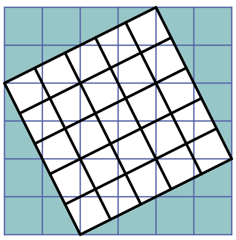


Рис. 5 *б*

12. Любой треугольник с вершинами в узлах и целыми сторонами можно увеличить в некоторое число раз так, что условия задачи будут выполнены. Для примера возьмём треугольник ABC из задачи 6.

Из решения задачи 6 мы знаем, что угол BAC в два раза больше угла DBC (рис. 6). Значит, биссектриса угла BAC проходит через точку K на рисунке (поскольку треугольники KAL и DBC равны), и далее проходит через точку O (которая на 5 клеток правее и на одну выше точки K – так же, как точка K на 5 клеток правее и на одну выше точки A).

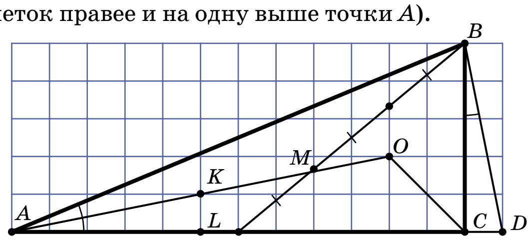


Рис. 6

Очевидно, что O лежит и на биссектрисе угла BCA, поэтому O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а значит, и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Пересечение высот – это точка C, она в узле.

Центр описанной окружности прямоугольного треугольника – это середина его гипотенузы. Чтобы эта точка попала в узел решётки, достаточно увеличить наш треугольник в 2 раза (подумайте, почему).

Медианы треугольника делятся их точкой пересечения M в отношении 2:1, считая от вершины. Концы медианы, выходящей из вершины B, лежат в узлах. Тогда, увеличив треугольник в три раза, мы получим, что точка M, отделяющая от медианы треть, тоже попадёт в узел. Значит, если увеличить треугольник в 6 раз, все нужные точки попадут в узлы!

ПРОГУЛКА В КОСМОСЕ

• Ближайшая к нам звезда – Солнце.

• На космической станции космонавт находится в состоянии невесомости, он ничего не весит.

• Права Лиза. Мы ощущаем удар, когда сталкиваемся с каким-нибудь предметом. Вова вполне мог столкнуться с космической станцией и сломать об неё палец. Если вы вдруг упадёте (лучше не надо) с дерева, то в полёте будете в состоянии невесомости по причине отсутствия опоры или подвеса, но контакт с твёрдой поверхностью будет весьма ощутимым. Можете и синяк заработать, и палец сломать.

ОЗАДАЧЕННЫЙ КОСТЯ

Костиной сестрёнке Лене всего четыре годика, и из списка предложенных вопросов она с трудом смогла понять только последний. На первые три вопроса она честно ответила «не знаю», поскольку действительно не знала, что там получится (да и вообще, о чём идёт речь). И лишь последний ответ позволяет определить, что она задумала число 3.

ВОЛШЕБНЫЙ КОШЕЛЁК

Устройство кошелька показано на рисунке. Ленточки прикреплены к картонкам в местах, отмеченных точками. Основа фокуса состоит в том, что такой кошелёк из закрытого состояния можно перевести в открытое двумя способами – и отложив верхнюю картонку вправо, и отложив её влево. Как с помощью этого проделать описанный трюк – сообразите сами.