Игорь Акулич

«Ещё идут старинные часы...»

– Федя! Сегодня твоя очередь дико смеяться.

– Даня, я уже встревожен. Неужели и ты начал искать (и, боюсь, нашёл) задачу про часы?

– Не нашёл. Придумал! Правда, пока не решил. Вот скажи: какой угол между часовой и минутной стрелками бывает дольше других?

– Ты, наверно, хочешь сказать «чаще». Так ведь мы уже знаем ответ. И проще всего его получить, если связать систему отсчёта с часовой стрелкой. Тогда она становится как бы неподвижной, а минутная стрелка совершает 11 оборотов за полсуток. И потому любой угол между стрелками (если отсчитывать его от часовой стрелки к минутной по направлению их вращения) встречается за полсуток одно и то же число раз, а именно – 11. Вот и всё!

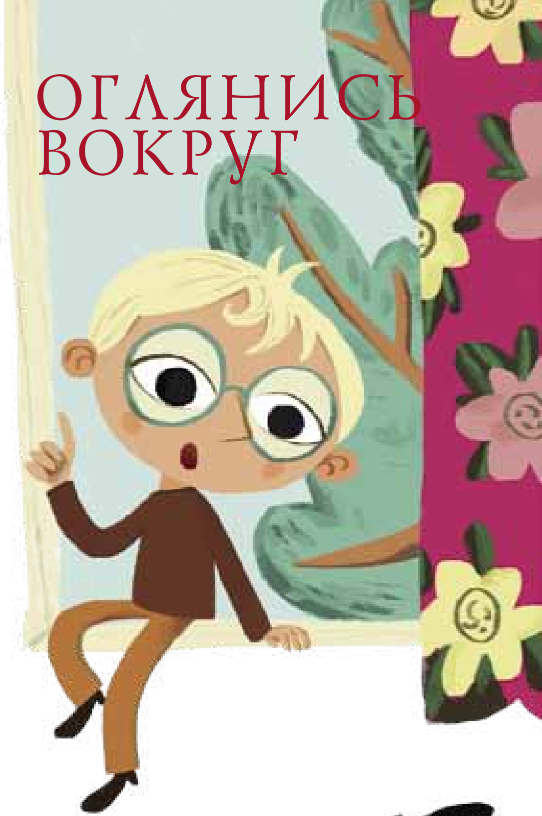
– Спасибо за содержательную лекцию, но я не ошибся – что сказал, то и сказал.

– Тогда любой угол бывает в течение нулевого времени. Потому что в какой-то момент он настал – и сразу же закончился. Как говорится, «есть только миг между прошлым и будущим...».

– Не надо поэзии. Просто как-то попалось мне в Интернете описание старинных электрических часов, которые ещё лет сорок-пятьдесят назад висели повсюду. Я даже фотографию скачал (см. иллюстрацию). Как видишь, на таких часах всего две стрелки: часовая и минутная. Но вот что интересно: ровно в 00:00 их стрелки вертикальны и остаются в таком положении целую минуту. А в 00:01 минутная стрелка скачком переходит вперёд на одно деление, часовая же *остаётся неподвижной*! Ещё через минуту минутная стрелка опять переходит на одно деление вперёд, потом – ещё на одно...

– И что, так целый час?

– В том-то и дело, что нет! Когда истекает 12-я минута (то есть в 00:12) *обе стрелки одновременно* перескакивают вперёд на одно деление, и минутная стрелка теперь отстоит от вертикального положения на 12 делений, а часовая – на одно. И это вполне логично, ведь минутная стрелка в обычных часах движется ровно в 12 раз быстрее часовой. Дальше опять 11 раз подряд скачет только минутная стрелка, а на 12-й раз – обе вместе. Ну и так далее (кстати, обрати



внимание – на картинке изображён как раз момент такого прыжка, когда минутная стрелка прыгает с 47-го на 48-е деление, а часовая – с 33-го на 34-е!). Таким образом, через час, то есть в 01:00, минутная стрелка оказывается опять вертикальной и смотрит на число «12», а часовая успевает переместиться на 5 делений и показывает на цифру «1», что и требуется. Согласись, что при таком движении стрелок уже можно говорить о *продолжительности* того или иного угла между ними.

– Согласен. Но тогда выходит, что возможный набор углов между стрелками не бесконечен и принимает… ну разумеется, 60 значений, соответствующих нулю (то есть совпадению стрелок), а также одному, двум, трём и так далее до 59 делений. И поскольку одно деление – это 6 градусов, то, перемножив, получаем…

– А может, не надо в градусы-то лезть? Потом умножим на 6, если захочется. Пусть пока остаётся просто «деление»[1]. Годится?

– Пожалуй. И, по-моему, здесь есть некие «особые» моменты, связанные с тем, что часовая стрелка скачет только в конце каждой 12-й минуты (в 00:12, 00:24, 00:36 и так далее в течение полусуток). Возможно, где-то вблизи них одни углы будут «держаться» дольше других. Но какие это углы?

– А давай хотя бы на начало процесса посмотрим. Итак, в течение первых 12 минут углы между стрелками составляют от 0 до 11 делений соответственно. Потом, в течение 13-й минуты, из-за двойного прыжка угол остаётся равным 11 делениям, и потому следующие 12 минут – с 13-й по 24-ю включительно – углы составят от 11 до 22 делений. Затем – снова двойной прыжок, поэтому в очередные 12 минут углы составят от 22 до 33 делений. Далее – от 33 до 44, и понеслось…

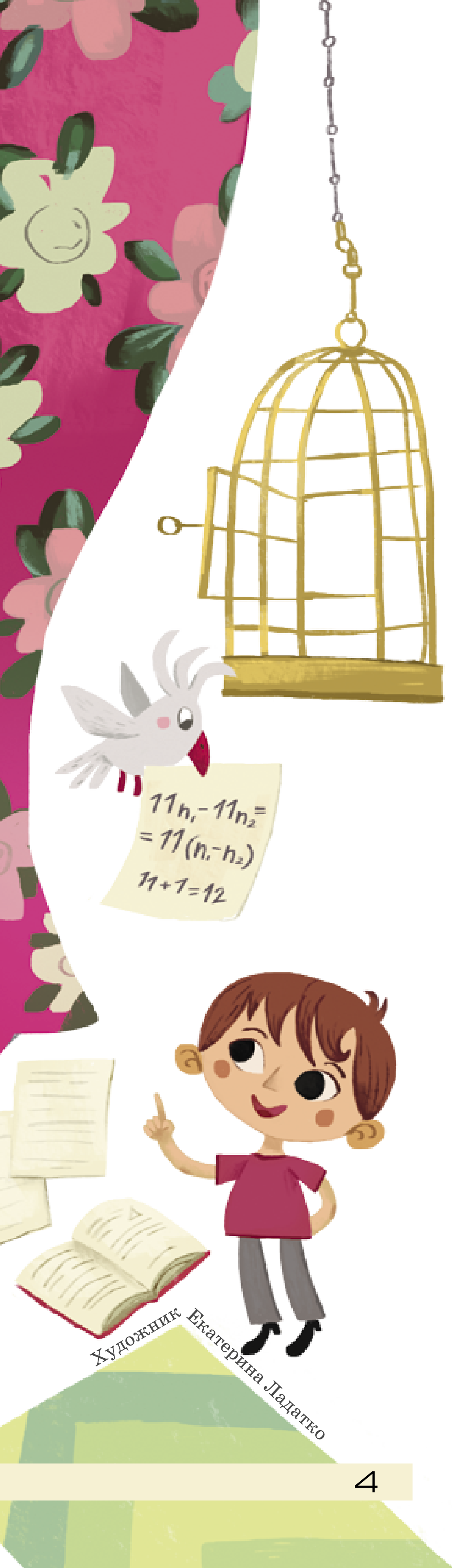
– Подожди-ка, тогда выходит, что мы спотыкаемся о каждую 12-ю минуту. А если пока что отбросить такие минуты? Тогда гораздо глаже дело пойдёт. А потом как-нибудь их учтём.

– А сколько таких минут?

– Ясно, сколько: каждая такая минута соответствует прыжку часовой стрелки, а таковых всего 60 – по числу делений на циферблате.

– Ага. И поскольку всего в полусутках 720 минут, то остаётся 720 – 60 = 660 «нормальных» минут.

[1] Здесь Даня не открывает Америку – то, что он предлагает, давно известно. Например, артиллеристы для своих расчётов издавна применяют единицу измерения углов, именуемую «БДУ», что означает «большое деление угломера». При этом 60 БДУ составляют как раз полный оборот, то есть БДУ по величине ничем не отличается от используемого Даней «деления» (есть ещё и малое деление угломера, то есть МДУ, которое в 100 раз меньше БДУ).



Художник Екатерина Ладатко

В конце каждой такой минуты скачет как бы только минутная стрелка, и угол между стрелками всё время меняется на одно деление. Здесь всё предельно ясно: все 60 возможных углов будут продолжаться в течение одинакового времени – по $660:60=11$ минут. Но что делать с оставшимися «злостными» минутами?

– Давай прикинем. Какие углы между стрелками образуются в эти минуты? Мы уже знаем: сначала – 11 делений, потом – 22, далее 33, 44, 55, 66...

– Стой, какие 66? Это будет уже не 66, а просто 6, потому что полные обороты (по 60 минут) при определении угла между стрелками следует отбрасывать.

– Есть идея! Итак, имеется 60 углов, начиная от 11 делений и с таким же шагом – тоже 11. Их можно записать в общем виде: $11n$, где n – все целые числа от 1 до 60 включительно. Но нас-то интересуют не сами эти углы, а остатки от их деления на 60 – ведь это и есть отбрасывание целого числа оборотов! И спрашивается: какие из остатков будут встречаться чаще других? А может, все поровну?

– Мне кажется, именно поровну! Но как это доказать?

– Погоди-ка! Если все поровну – то каждый будет по одному разу, верно? Значит, надо всего-то доказать, что *не может быть* двух одинаковых остатков. И что тут придумать?

– Попробуем «от противного» – авось получится. Итак, пусть для двух каких-то значений n от 1 до 60 (скажем, n_1 и n_2, причём $n_1 > n_2$) остатки от деления чисел $11n_1$ и $11n_2$ на 60 совпали. Тогда их разность делится на 60. Но она равна $11(n_1 - n_2)$. А ведь это число не делится на 60! В самом деле: 11 и 60 не имеют общих делителей, больших 1, откуда на 60 должна делиться разность $n_1 - n_2$. Но эта разность заведомо *больше нуля* и строго меньше 60 (ведь в ней уменьшаемое *не больше* 60, а вычитаемое *не меньше* 1). Противоречие! Поэтому при n от 1 до 60 числа вида $11n$ дают разные остатки при делении на 60, что соответствует *разным* углам, и каждый из них «держится» ровно минуту. Всего же за полсуток каждый угол от 0 до 59 делений продолжается поровну – по $11+1=12$ минут.

– Эх, жаль, чуда не случилось!

– Зато полное равенство и справедливость для всех углов – и никому не обидно. Это радует!