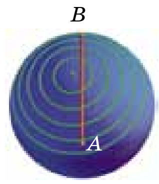
КАК СПРЯТАТЬ ГРУЗ? («Квантик» №1)

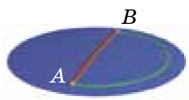
Подобное изобретение описано в фильме «Однажды в Америке» (на экране телевизора кадр из этого фильма). В мешке находится соль. Заметив приближение патруля, запрещённый груз сбрасывали в воду, и тот шёл ко дну. Однако через некоторое время соль растворялась, и груз всплывал благодаря поплавку (он прикреплён к ящику сверху).

ВМЕСТЕ С СОЛНЦЕМ

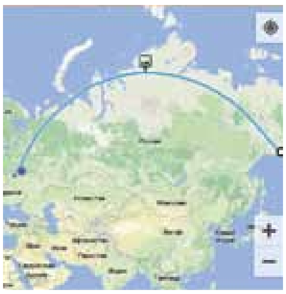


Самолёт летит по кратчайшей линии, проходящей над поверхностью Земли и соединяющей начальную и конечную точки его маршрута (назовём их A и B). Эта линия – дуга большого круга; она получается, если пересечь поверхность Земли плоскостью, проходящей через точки A, B и центр Земли. Поэтому траектория, соединяющая две точки в северном полушарии, лежащие на одной широте, будет проходить не по параллели (как можно было бы подумать), а отклонится от параллели к северу.

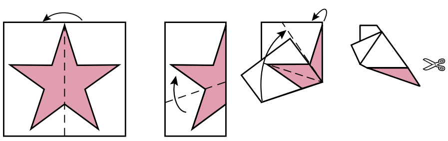
В качестве крайнего случая можно рассмотреть ситуацию, когда долгота начальной и конечной точки отличаются очень сильно, на величину, близкую к 180°: кратчайший путь из Москвы в Сан-Франциско проходит почти над Северным полюсом!



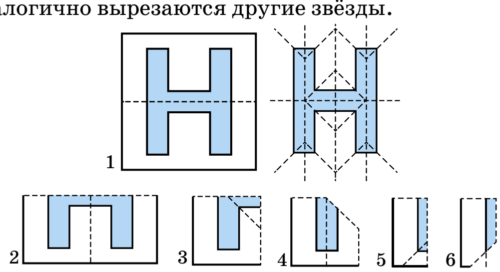
На картинке приведён трек рейса Магадан–Москва, который Игорь записал с помощью GPS. Самая северная точка маршрута имеет широту около 73°, то есть находится уже за Северным полярным кругом (широта которого около 66°). В январе в этих широтах полярная ночь. Поэтому когда самолет уйдет к северу, за его окнами действительно будет темно. Да и летит самолёт севернее Оби и Енисея.

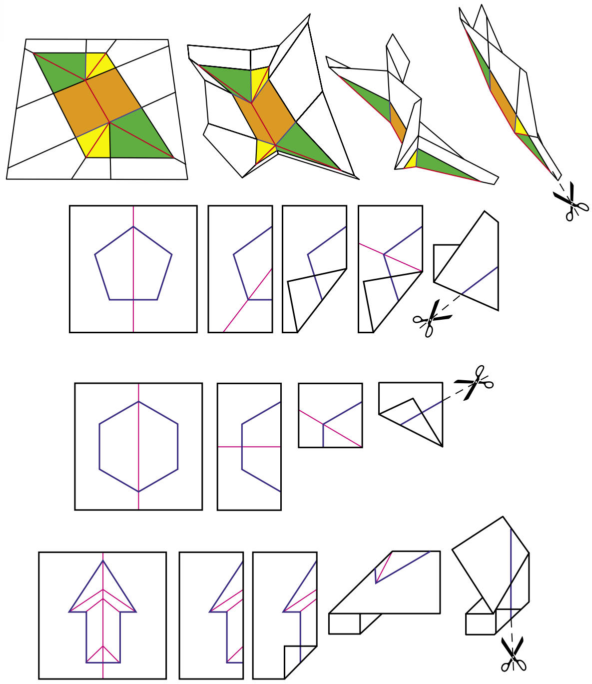


ОДНИМ РАЗРЕЗОМ



Аналогично вырезаются другие звёзды.



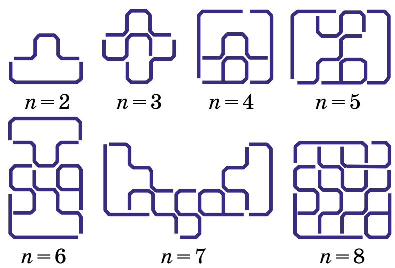


ЗАБЛУДИЛСЯ АКРОСТИХ

1) МИТРОФАН. Переписчик заменил «море» на «горе» (о чём можно догадаться по первым строкам о волнах и кораблях); кроме того, в строке 6 нужно поменять местами слова «подобно» и «фараону».

2) В отрывке по вертикали зашифровано начало первой строки «НЕ ДИВНО», благодаря чему текст приобретает красивую форму прямого угла. Для восстановления его исходного вида следует поменять местами слова «благий» и «дом» в строке 3 и перенести слово «любовь» из начала в конец строки 5 (об этом можно догадаться по нарушенной рифме).

СИММЕТРИКСЫ ИЗ ОДНОЙ ОЛИМПИАДНОЙ ЗАДАЧИ



В некоторых случаях известно несколько решений, при $n = 7$ и 8 известно по одному решению. Решение при $n = 7$ нашёл Г. И. Ярковой из г. Тольятти, трёхкратный чемпион России по решению головоломок в заочном первенстве, а решение при $n = 8$ является решением головоломки «Квадратная сетка» и решением олимпиадной задачи, о которой речь шла в начале заметки.

LXXXII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Ответ: да. Пример приведён на рисунке 1.

2. Возможный пример показан на рисунке 2.

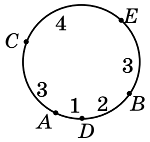


Рис. 1

	3	5	7
4	6	8	10
	9	11	12

Рис. 2

3. Число n – чётное, поскольку делится на 500, и, более того, по этой же причине число n делится на 4. Если d – нечётный делитель числа n, то число $2d$ тоже является делителем числа n, причём $2d \neq n$, так как $2d$ не делится на 4. Получается, что вместе с каждым нечётным делителем d на доске также написан ровно в два раза больший делитель $2d$. Поэтому сумма нечётных чисел на доске не просто меньше, чем сумма чётных, а по крайней мере в два раза меньше.

4. Допустим, что это не так. Пусть мальчик Саша – наименьший по росту из трёх упомянутых детей. Пусть X – следующий по росту ребёнок. Заметим, что Саша и X получили поровну конфет от всех остальных детей. Действительно, каждый из остальных детей либо ниже и Саши, и X, либо выше их обоих. Тогда и Саша, и X получили конфеты только от мальчиков, которые меньше их ростом, либо от более высоких девочек.

Кроме того, мальчик Саша дал конфету ребенку X, так как X выше. Поскольку Саша – один из тех, кто получил наибольшее число конфет, не может так быть, что X получил больше конфет, чем Саша. Значит, X должен был дать конфету Саше. Получается, что X – девочка и у неё столько же конфет, сколько у Саши, то есть X – это Женя или Валя.

Вопрос на засыпку: сколько же всё-таки мальчиков и сколько девочек может быть среди этих трёх детей?

5. Ответ: четыре пятёрки (например, если на доске написаны числа от -4 до 5).

Пусть на доске написаны числа a, $a+1$, ..., $a+9$, и пусть S – их сумма. Вычеркнув одно число и подсчитав сумму оставшихся чисел, мы получим в качестве результата одно из чисел $S-a$, $S-a-1$, ..., $S-a-9$. Заметим, что эти суммы представляют собой 10 последовательных целых чисел и именно среди них школьники отыскивают квадраты целых чисел.

Посмотрим, какое наибольшее количество квадратов целых чисел может быть среди последовательных 10 чисел. Ясно, что достаточно изучить этот вопрос, когда все числа неотрицательны. Если взять число от 0 до 9, то среди них оказывается четыре квадрата: 0, 1, 4, 9. Для чисел от 1 до 10 количество квадратов равно трём, для чисел от 2 до 11, или от 3 до 12, или от 4 до 13 количество квадратов равно двум. Среди чисел от 5 до 14, как и среди чисел от 6 до 15, имеется всего один квадрат, а среди чисел от 7 до 16 – снова два квадрата.

Заметим, что чем более крупные числа мы рассматриваем, тем реже встречаются квадраты. Действительно, формула $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ показывает, что чем крупнее x, тем больше разность между $(x+1)^2$ и x^2. Значит, если $x \geqslant 3$, то разность между соседними квадратами $(x+1)^2$ и x^2 не меньше 7. Поэтому в случае, когда наименьшее из десяти последовательных чисел больше 4, среди таких чисел не может оказаться даже трёх квадратов. Действительно, наименьший из квадратов не меньше $3^2=9$, значит, разность между первым и вторым квадратами не меньше 7, и тогда разность между вторым и следующим тоже не меньше 7; таким образом, разность между третьим и первым не меньше 14 и они не могут оба принадлежать множеству из 10 последовательных целых чисел.

6. Ответ: 2^{11}.

Представим себе, что лесенка уже заполнена числами. Тогда, спускаясь по лесенке, то есть двигаясь по клеткам вправо или вниз, мы в очередной клетке каждый раз будем обнаруживать число, которое больше всех чисел в уже пройденных клетках. В частности, если из какой-либо клетки, делая шаги вправо или вниз, мы дошли до другой клетки, то число в первой клетке меньше числа во второй. Поскольку из клетки A (рис. 3) мы можем дойти, двигаясь вправо и вниз, до любой другой клетки таблицы, в клетке A должно стоять наименьшее число в таблице, то есть 1. Из клетки B мы тоже можем дойти до всех клеток (кроме A), значит, в клетке B стоит второе по величине число, то есть 2.

Далее, из клеток C и D мы за один шаг можем дойти до клетки E, а из клетки E – до всех остальных чисел таблицы (кроме тех, которые мы уже изучили). Значит, в клетках C и D должны стоять числа 3 и 4, а в клетке E – число 5. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что в клетках F и G должны стоять числа 6 и 7, а в клетке H – число 8 и так далее.

Таким образом, в любой расстановке положение чисел 1, 2, 5, 8, 11 и так далее определено однозначно, а положение остальных чисел – с небольшими вариациями: числа 3 и 4, стоящие в клетках C и D, можно поставить двумя способами (в клетку C – число 3, а в клетку D – число 4, либо наоборот), аналогично числа 6 и 7 можно поставить двумя способами, числа 9 и 10 тоже двумя способами и так далее – всего имеется 11 пар таких чисел. Выбор каждого из этих 11 вариантов осуществляется независимо от остальных, потому при подсчёте общего количества способов указанные числа вариантов нужно перемножать.

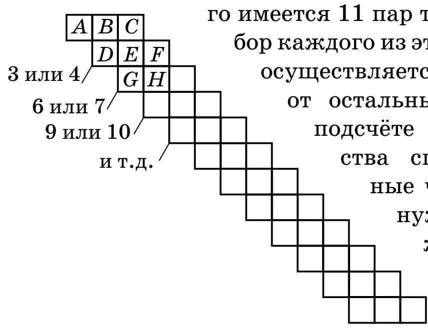


Рис. 3