Иван Высоцкий,
Игорь Акулич

НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ СТАСА

Часть 3,
в которой Стас изобретает антилотерею, Поляков – частичного зайца, а заяц оказывается в безразличном равновесии

Окончание. Начало в №№ 3–4 за 2016 год.

31 ОКТЯБРЯ. СУББОТА. 20:50.
Прогулка

Сторонний наблюдатель мог бы подумать, что Патрик – Самая-Смирная-Собака-на-Свете. Семенит себе рядышком… Но стоит на секунду отвлечься… Патрик усыпил бдительность Стаса и рванул в куст боярышника. Конечно, Стас держал поводок в руке, а руку, как всегда, в кармане. Треск рвущихся ниток. Мама никак не могла понять, почему у Стасовой куртки вечно оторван край кармана, как ни пришивай, а Стас тайну не открывал. Вместе с рукой из кармана вылетел клочок бумаги, и Стас наклонился за ним, одновременно вытаскивая упирающегося пса из невероятно привлекательного куста.

Клочок оказался позавчерашним билетиком на электричку. Школьный за 25 рублей. Дороже лотерейного на 5 рублей, подумал Стас. Интересно, а почему железная дорога не разыгрывает железнодорожные билеты, как лотерейные? Может, тогда все зайцы покупали бы билеты? Стас вдруг подумал, что заяц сам себе устраивает как бы лотерею. Только это получается антилотерея. Заяц покупает «антибилет», то есть не покупает билета вовсе, и иногда получает «антивыигрыш» – то есть платит штраф. Стас вспомнил свои расчёты.

Заяц ездил 87 раз, а попался контролёрам только 5 раз. Билет 50 рублей плюс штраф 825 рублей, всего 875 рублей. Значит, вероятность получить антивыигрыш 875 рублей на один антибилет примерно $\frac{5}{87}$, а вероятность заплатить 0 рублей равна $\frac{82}{87}$. Математическое ожидание получается 875 умножить на… сколько же?.. Калькулятор в мобильнике. Умеете держать одной рукой развеселившуюся собаку, другой – мобильный, да ещё тыкать в кнопки? Стас умел. 50 рублей 29 копеек. Это математическое ожидание расходов на одну поездку для зайца.

Если только вероятность встретить контролёра $\frac{5}{87}$. А если нет? Предположим, что на обратном пути наш заяц не встретит контролёра. Тогда нужно считать, что вероятность $\frac{5}{88}$. А если встретит? Тогда уже $\frac{6}{88}$…

После прогулки папа выслушал рассказ про зайца и непослушную вероятность и коротко кивнул, подтвердив Стасовы худшие опасения: точная вероятность неизвестна, известна только её оценка, которая меняется в зависимости от обстоятельств. Значит, математическое ожидание штрафа тоже можно оценить только приблизительно.

– Значит, я нашёл не математическое ожидание?

– Ты нашёл среднее по имеющимся данным. В данном случае – средний штраф в расчёте на одну поездку. Это – приближённое значение математического ожидания, его оценка, возможно, неплохая.

– А в школьной задаче про лотерею?

– А в задаче про лотерею тебе по условию были известны точные вероятности. Поэтому там и ожидание было посчитано точно.

– Откуда же Лидия Павловна знала точные вероятности?

– Не знаю… Может быть, устроитель лотереи объявил, сколько билетов напечатано и сколько каких выигрышей.

– Ну да... Это же лотерея. А железная дорога не сообщает, как часто будет ходить контролёр.

– Видишь ли... События с известными шансами встречаются только в играх, например в лотереях. А в реальной жизни точные вероятности событий никому не известны.

Тут вдруг телевизор, негромко бормотавший что-то, встрепенулся и оперным голосом пропел: «Что наша жизнь? Игра!!!». Началось «Что? Где? Когда?». Папа и Стас любили эту передачу.

– Пап, а ты когда-нибудь ездил зайцем?

Но папа не расслышал вопроса, вероятно, он был увлечён телеигрой.

2 НОЯБРЯ. ПОНЕДЕЛЬНИК. 14:30. Дорога из школы

Пересчитывая школьной сумкой прутья в заборе детского сада, Стас толкал речь, обращённую к Славке Полякову.

– Понимаешь, если заяц всегда покупает билет, то он платит 50 рублей за поездку. А если не покупает, то математическое ожидание расходов 50 рублей 29 копеек. И это тоже на одну поездку. Причём это не точное ожидание, а только оценка. На самом деле это, скорее всего, близко, но не точно. Понимаешь, это как лотерея наоборот...

Поляков шёл, опустив голову. В голове шли процессы. Стас думал, как же объяснить, чтоб Славка понял и восхитился. Но Славка всегда был понятлив и давно всё понял. И думал уже о другом.

– А что, если заяц будет не полный, а, так сказать, частичный?

– Это как?

– Если он покупает билет не каждый раз, а через раз. Или через два на третий. Или как-то ещё. Например, он может бросать монетку, покупать билет сегодня или нет. Удастся ли уменьшить ожидаемый расход?

– Не знаю.

– Нужно учесть вероятность покупки билета и вероятность появления контролёра.

– Пять восемьдесят седьмых.

– Стас, ты очень умный, но слишком конкретный. В общем виде проще. С переменными. Потом подставляй, что хочешь.

Стас задумался о семантической разнице между «очень умный» и «умный очень». Было непонятно, обижаться на Славку или нет. За размышлениями Стас пропустил содержательную сторону Славкиной речи.

– Чё?

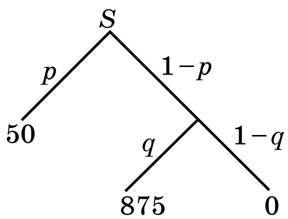
– Я говорю, пусть вероятность встречи с контролёром равна q, а вероятность того, что пассажир покупает билет, равна p.

– Заяц?

– Пассажир. С вероятностью p он не заяц, а с вероятностью $1-p$ – заяц.

Ребята шли вдоль большого нового дома по дорожке, покрытой непозволительно свежим и ровным асфальтом. Стас, свято верящий в силу графических методов, просто не мог видеть нетронутый асфальт. У него чесались руки.

– Сейчас нарисую. – Стас подобрал на газоне обломок кирпича и приступил. – Если покупаешь билет (вероятность p), то платишь 50 рублей.



– А если не покупаешь, возможны варианты, – продолжал Славка. – Рисуй. Контролёр попадётся с вероятностью q.

– Условной, – ввернул Стас.

– Да всё равно, условная или безусловная. Ведь контролёр появляется независимо от того, купил ты билет или нет. И если контролёр пришёл, ты платишь 875 рублей за штраф и билет.

– Хорошо. А с вероятностью $1-q$ контролёр не появляется. И тогда ты вообще ничего не платишь.

Получившийся граф Стасу что-то смутно напомнил.

Тем временем Славка взял кирпич и нарисовал на асфальте распределение.

Затраты	0	50	875
Вероятность	$(1-p)(1-q)$	p	$(1-p)q$

Значит, математическое ожидание равно

$$EX = 50p + 875(1-p)q.$$

– Это число нужно сделать как можно меньше. Нужно подобрать такое p.

– Почему p?

– Потому что мы хотим решить, как часто зайцу лучше покупать билет. С какой вероятностью.

– Скобки надо раскрыть и того... закрыть... – Стас завладел кирпичом.

$$EX = 875q + p(50 - 875q).$$

– Вот, смотри, что получается, – начал уверенно Славка, – смотри вот. Вот, что получается... Получается, что вот...

– И что получается, молодые люди? А что такое X? – Голос папы Лёши раздался за спиной внезапно, ребята даже вздрогнули. Сегодня понедельник, вспомнил Стас, папа работает дома. Наверно, вышел в магазин.

Славка объяснил:

– Это, дядя Лёш, затраты на одну поездку на электричке.

– Уж не про зайца ли тут вычисления?

Стас кивнул. Папа быстро вошёл в курс дела.

– Похоже, верно. Именно так. А получается вот что. Это выражение нужно сделать как можно меньше, так? Если q маленькое, то $50-875q>0$ и поэтому чем меньше p, тем лучше. Так что билет лучше вообще не покупать никогда. Тогда $p=0$, и математическое ожидание расходов будет минимально.

А если q большое, то $50-875q<0$. Тогда чем p больше, тем лучше. Самое большое $p=1$. Значит, в этом случае билет нужно покупать всегда. Вот такая стратегия: либо всегда покупать, либо никогда, в зависимости от того, велика или мала вероятность встретить контролёра.

– А если $50-875q=0$? Тогда что?

– Тогда, братцы, наступает занятная ситуация. Тогда от p ничего не зависит. Хоть ты берёшь билет, хоть нет, хоть через раз – средний расход будет один и тот же. Такую ситуацию физики называют «безразличное равновесие». Кстати, в вашем конкретном случае... я хотел сказать, в конкретном случае того зайца ситуация если и не безразличное равновесие, то весьма близка к нему. И ведь почувствовал заяц равновесие это и выразил его кратко и ёмко: «ТО НА ТО И ВЫЙДЕТ».

Славка на всякий случай решил уточнить:

– Дядь Лёш, это если q равно $\frac{50}{875}$?

– Да, конечно.

– Но ведь вряд ли вероятность контролёра в точности равна...

– Именно, именно, друзья мои. Я об этом и говорю. Вряд ли. В жизни вероятности событий редко известны точно. А на самом деле – никогда. Но Стас мне говорил, что частота появления контролёра около $\frac{5}{87}$ или $\frac{5}{88}$, а это очень близко к $\frac{50}{875}$. Поэтому можно считать, что ваш заяц как раз и находится в ситуации, близкой к равновесию.

– А когда вероятности можно точно найти? – спросил Славка.

Ну тут Стас уже не дал отцу шанса. Ведь он уже знал ответ:

– В жизни нельзя. А можно только в лотереях всяких. В играх, короче.

Из приоткрытого окна первого этажа нового дома вдруг завопил громкий и резкий тенор: «Что наша жизнь? – Игра!!». Первый канал начал повтор субботнего выпуска «Что? Где? Когда?».

Художник Анна Горлач