НАШ КОНКУРС, III ТУР («Квантик» № 3, 2016)

11. *Когда Петя, Коля, Вася и Дима играли в мяч, один из ребят разбил окно. На вопрос «Кто разбил окно?» все, кроме Димы, ответили «Не я», а Дима ответил «Не знаю». Оказалось, что двое мальчиков сказали правду, а двое соврали. Сказал ли Дима правду?*

Ответ: Дима соврал.

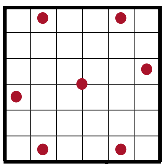
Так как окно разбил только один мальчик, то из трёх сказавших «Не я» хотя бы двое сказали правду. Тогда оставшиеся двое соврали, а Дима среди них, то есть Дима соврал.

12. *Вася получил за год несколько оценок по математике, всего их было меньше 100. Ровно треть из них – тройки, ровно четверть – четвёрки, ровно пятая часть – пятёрки. А сколько Вася получил двоек? Назовите точное количество.*

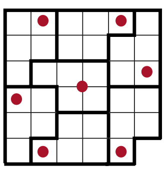
Ответ: 13 двоек.

В задаче предполагается, что возможные оценки – это 5, 4, 3 и 2. Количество пятёрок, четвёрок и троек – целое число, поэтому общее число оценок делится на 5, 4 и 3. Значит, общее число оценок делится на наименьшее общее кратное этих чисел, то есть на 60. Единственное натуральное число, которое делится на 60 и меньше 100 – это само число 60. Значит, общее число оценок равно 60, пятёрок было 12, четвёрок 15, троек 20, а двоек тогда $60-12-15-20=13$.

13. *Белоснежка испекла на праздник торт, разграфлённый на клеточки и украшенный вишенками, как показано на рисунке. Отрезав себе угловую клеточку (правую нижнюю), она хочет разделить оставшуюся часть торта на 7 одинаковых по размеру и форме кусков так, чтобы каждому из семи гномов досталось по целой вишенке. Помогите Белоснежке это сделать.*



Один из возможных ответов приведён на рисунке.



14. *На доске в строчку написаны двадцать пятёрок. Поставив между некоторыми из них знак «+», Толя обнаружил, что сумма равна 1000. Сколько плюсов поставил Толя? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Ответ: 9 плюсов.

Первое решение. Так как цифр двадцать, то слагаемых может быть от 1 до 20. Поделим сумму и все слагаемые на 5. Теперь слагаемые имеют вид 1, 11, 111 и так далее, а сумма равна 200. Для того, чтобы сумма оканчивалась цифрой 0, число слагаемых должно делиться на 10. Значит, слагаемых либо 10, либо 20. Если слагаемых 20, то все слагаемые состоят из одной цифры, и сумма получается слишком маленькая. Значит, слагаемых ровно 10, а плюсов между ними – 9.

Второе решение. Можно явно найти, сколько и каких слагаемых в сумме. Сначала исключаем слагаемые из 4 и более цифр (они больше 1000). Остаются слагаемые 555, 55 и 5. Если нет ни одного слагаемого 555, то максимальная сумма – 550. Если слагаемых 555 два или больше, то сумма больше $555\cdot2=1110$. Значит, в сумме будет ровно одно слагаемое 555. Из остальных 17 пятёрок нужно составить сумму 445. Так как $55>5+5$, то чем больше будет слагаемых 55, тем больше будет сумма. Если использовать 8 слагаемых 55 и одно слагаемое 5, то сумма равна $8\cdot55+5=445$. Если же заменить одно или несколько слагаемых 55 на $5+5$, то сумма станет меньше. Значит, единственный способ получить 1000 – это использовать сумму $555+55\cdot8+5$. И в каком бы порядке ни стояли эти слагаемые, плюсов всегда 9.

15. *На одной известной картине изображены 4 бурых медведя. Петя и Вася, двое ценителей искусства, по очереди перекрашивают по одному медведю, начинает Петя. Если медведь был бурым, он становится белым, а если был белым – становится бурым. Делая ход, игрок может выбрать любого медведя (в том числе и ранее перекрашенного), но при условии, что после смены цвета картина не станет точно такой же, какой она была в какой-то предыдущий момент. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник?*

Ответ: выигрывает Петя.

Разобьём всевозможные картины, которые могут получиться с помощью перекрашивания медведей, на пары так, чтобы картины в каждой паре отличались лишь цветом первого медведя. Пример двух картин из одной пары: + + – + и – + – +, где «+» обозначает белый цвет медведя, а «–» обозначает бурый цвет.

Петя всегда сможет сделать ход, если будет перекрашивать картину в парную к ней. Действительно, после каждого такого хода Пети ситуация будет следующей: в каждой паре картины либо обе уже встречались, либо обе ещё не встречались. Поэтому Васе ничего другого не остаётся, как своим ходом получить картину из новой пары, в которой обе картины ранее не встречались. И Петя опять сможет сделать ход по своему правилу. И так далее, пока у Васи не останется хода.

ЗАДАЧА О ВОДЯНОЙ ЛИЛИИ («Квантик» № 4)

Пусть точка O – точка на дне, откуда растёт стебель, A – верхний конец стебля, B – точка, в которой выходит из воды прямостоящий стебель, C – точка, в которой цветок лилии коснётся воды, если стебель отклонить. Пусть $OB = x$ м (глубина озера). Тогда $OC = OA = OB + BA = x + 0{,}1$ м, и по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OBC получаем: $x^2 + 0{,}5^2 = (x + 0{,}1)^2$, откуда $2x \cdot 0{,}1 = 0{,}24$ и $x = 1{,}2$ м.

Итак, глубина озера в том месте, где растёт лилия, равна 1,2 метра.

АМЕРИКАНСКИЕ ГОНКИ («Квантик» № 4)

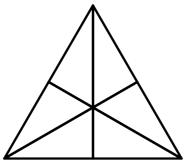
Энергия вагона (будем называть этим словом ряд кресел) не меняется при движении – это сказано в условии: ни трения, ни моторов нет. На повороте она складывается из движения тела как целого в направлении рельса и его вращения при этом вокруг центра масс. Эти две части независимы: например, если плавно опустить на землю велосипед, предварительно покрутив руками педали, он попытается поехать вперёд: энергия вращения колёс частично перешла в энергию движения всего велосипеда вперёд.

Итак, на прямом участке есть только энергия поступательного движения (так как вагон не вращается), значит, часть её на повороте налево перейдёт во вращательную и вагон замедлится, так что центрального седока (а левого и подавно) сиденье дёрнет назад, а самого правого – толкнёт вперёд, так как его скорость возрастёт (не могут же все части замедлиться, тогда суммарная энергия упала бы). При съезде с поворота вращательная энергия перейдёт обратно в поступательную, скорость вагона увеличится, так что центрального седока и левого кресло толкнёт вперёд, а самого правого – назад.

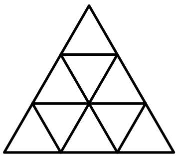
Отдельный интересный вопрос – как так получается: от чего отталкивается вагон при съезде с (левого) поворота, что его разгоняет? Единственное, с чем он взаимодействует, – рельс. Присмотримся к тому, что происходит в месте касания колёс, когда вагон уже частично (но не целиком) съехал с поворота. Вагон замедляет вращение, упираясь в рельс передней частью правого крепления и задней частью левого крепления. Сзади рельс ещё закруглён, а спереди уже прямой, поэтому он толкает переднюю и заднюю часть крепления в не совсем противоположных направлениях. В результате сумма этих сил имеет компоненту, направленную вперёд, она вагон и разгоняет.

КАК РАЗРЕЗАТЬ РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК НА 5 РАВНЫХ ЧАСТЕЙ?

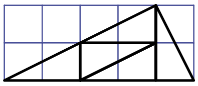
1. а) Соединим вершины треугольника с серединами противоположных сторон, см. рисунок.



б) Разделим каждую сторону треугольника на три равные части и соединим точки, как показано на рисунке.



2. Пример приведён на рисунке (для удобства мы нарисовали его на клетчатой бумаге). Его можно обобщить: если число N представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел, то найдётся прямоугольный треугольник, который можно разрезать на N равных прямоугольных треугольников.



ПОЧЕМУ СВЕТОЛЮБИВЫЕ ДЕРЕВЬЯ ЕЩЁ НЕ ВЫМЕРЛИ?

На полянах могут встретиться берёзы не старше 100-летнего возраста. Это поляны, возникшие на месте ветровала от ураганов 10 и 50 лет назад, а также расчищенный бобрами участок вдоль речки. Его площадь – $(50 + 50) \cdot 2000 = 200\,000$ м^2, или 20 га. Общая площадь леса, где растёт берёза, $20 + 15 + 8 = 43$ га.

АХМАТОВА, МАРШАК И ЛОМОНОСОВ

Выдумана вторая история – под квартирой № 1 другой квартиры быть не может.

XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ, 8 – 9 КЛАССЫ

1. Ответ: можно.

Заметим, что если где-то в круге стоит мальчик, то через одного по часовой стрелке не может стоять девочка – тогда у ребёнка между ними одновременно и синяя футболка (так как он – сосед мальчика по часовой стрелке), и красная (так как он – сосед девочки против часовой стрелки). Поэтому через одного от мальчика по часовой стрелке должен стоять мальчик, через одного от него – снова мальчик, и так далее. Так как мальчики в круге есть, всего мальчиков не меньше половины. Аналогично, девочек тоже не меньше половины. Следовательно, мальчиков и девочек по 10.

2. Прямая CB и проведённая окружность симметричны относительно высоты AH. Значит, и их общие точки C и N симметричны. Поэтому в треугольнике ACN два угла по $60°$, и он равносторонний. Аналогично, треугольник BCM – равносторонний. Следовательно, прямые AN и BM параллельны (ввиду равенства углов CAN и CMB).

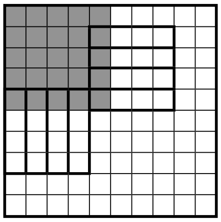
3. Ответ: существуют.

Например, числа 1008, 2, 1510 единиц и 504 минус единицы.

Другой пример: 9, 7, –8, –4 и 2012 единиц.

4. Ответ: на 9 многоугольников.

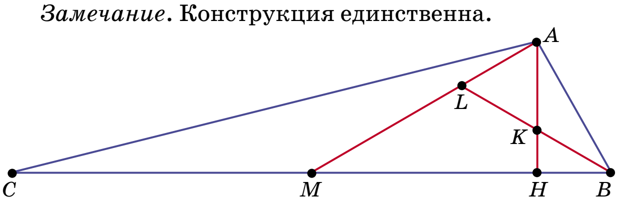
В каждом многоугольнике разбиения должны быть клетки обоих цветов. Значит, в нём должна быть чёрная клетка, граничащая с белой. Но таких клеток всего 9. Пример разрезания на 9 многоугольников приведён на рисунке.



5. Ответ: мог.

Пусть в треугольнике ABM с углами соответственно 90°, 60° и 30° высота AH и биссектриса BL пересекаются в точке K (см. рисунок). Отметим ещё точку C так, чтобы M стала серединой BC. Простой подсчёт углов показывает, что в треугольнике ABC медиана AM, высота AH и биссектриса BL отрезают равносторонний треугольник AKL с красными сторонами.

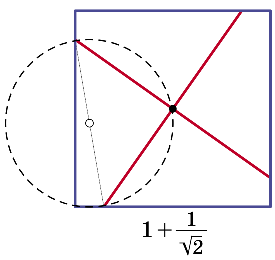
Замечание. Конструкция единственна.



ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ВАРИАНТА

1. Кусочек $\overline{ab}$ встретится при любом разрезании пятизначного числа $\overline{abcab}$.

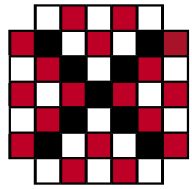
2. Разрежем данный квадрат на 25 квадратиков 2×2. Каждый из них разрежем отрезками, исходящими из центра и делящими стороны на отрезки длины $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. рисунок). Получится четыре равных четырёхугольника, переходящих друг в друга при повороте на 90°. Они вписаны в окружности с диаметрами $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{3}$.



4. Ответ. 18 квадратов.

Оценка. Три квадрата при вершине куба образуют цикл соседних клеток длины 3. Вокруг него образуется ещё один цикл длины 9 из соседних клеток. А вокруг него – цикл длины 15. Взяв вокруг двух противоположных вершин куба по три таких цикла, а вокруг остальных вершин – по два малых цикла, получим 18 непересекающихся нечётных циклов. Поскольку нечётный цикл в два цвета правильно покрасить нельзя, каждый из них должен содержать чёрные клетки.

Пример. Покрасим четыре боковые грани в красный и белый цвета в шахматном порядке. Верхнюю и нижнюю грани покрасим как на рисунке.



5. а) Ответ. За $n+2$ попытки.

Оценка. Пусть было $n+1$ попыток. В каких-то двух попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем её плохой. В остальных $n-1$ попытках выберем по батарейке и сделаем их плохими. Всего не более n плохих батареек, а фонарик точно светить не будет.

Пример. Разобьём батарейки на n кучек: в одной – три батарейки, в остальных – по две. В какой-то кучке окажется хотя бы две хороших батарейки. В каждой кучке проверим все возможные пары – всего $n+2$, и фонарик загорится.

б) Ответ. За $n+3$ попыток.

Оценка. Пусть было $n+2$ попыток. В каких-то попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем её плохой. Если осталось менее n попыток, то в каждой из них выберем по плохой батарейке. Если же осталось n попыток, то в них использовались только оставшиеся $2n-1$ батареек. Поэтому опять в каких-то двух попытках использовалась одна и та же батарейка, сделаем её плохой. В остальных $n-2$ попытках выберем по плохой батарейке. Всего не более n плохих батареек, а фонарик точно светить не будет.

Пример. Разобьём батарейки на $n-1$ кучек: в двух – по три батарейки, в остальных – по две. В какой-то кучке окажется хотя бы две хороших батарейки. В каждой кучке проверим все возможные пары – всего $n+3$, и фонарик загорится.

Замечание. При $n=2$ нужно 6 попыток.

ЛЕНТА МЁБИУСА ИЗ СКОТЧА

Покажем, как получить из полоски скотча ленту Мёбиуса без клейкой части. Для этого у полоски надо склеить половину клейкой стороны со второй её половиной. Для начала отметим у полоски середину клейкой стороны. Затем перекрутим один конец полоски на пол-оборота и пристыкуем к отмеченной середине так, чтобы клейкие кусочки соединились (см. рисунок). Далее постепенно склеиваем друг с другом клейкие стороны, проглаживая полоску.