## НАШ КОНКУРС, IV ТУР («Квантик» № 4)

**16.** *В коробке лежали спички. Их количество удвоили, а затем убрали 8 спичек. Остаток спичек снова удвоили, а затем снова отняли 8 спичек. Когда эту операцию проделали в третий раз, то в коробке не осталось ни одной спички. Сколько их было сначала?*

Проследим за числом спичек в обратном порядке – от конца к началу. Последней операцией число спичек удвоили, вычли 8 и получили 0. Значит, перед последним шагом было 4 спички. Чтобы получить число спичек перед предыдущей операцией, надо к 4 прибавить 8 и разделить на 2 – получаем 6 спичек. А перед первой операцией, то есть в самом начале, спичек было $(6+8):2$ – всего 7 штук.

**17.** *Прямоугольник разделён двумя отрезками, параллельными его сторонам, на 4 прямоугольника. Площади трёх из этих кусочков равны 4, 8 и 12 см$^2$. Найдите площадь четвёртого кусочка (укажите все варианты).*

Расположим прямоугольник так, чтобы кусочек площади 4 см$^2$ был в левом верхнем углу, а соседний с ним справа кусочек тоже был известной площади. Тогда есть четыре варианта расположения кусочков:

| | |
|---|---|
| 4 | 8 |
| ? | 12 |

| | |
|---|---|
| 4 | 8 |
| 12 | ? |

| | |
|---|---|
| 4 | 12 |
| 8 | ? |

| | |
|---|---|
| 4 | 12 |
| ? | 8 |

В первом случае: у верхних прямоугольников вертикальные стороны одинаковы, но площадь правого вдвое больше площади левого. Значит, горизонтальная сторона правого прямоугольника вдвое больше горизонтальной стороны левого. Но тогда это верно и для нижних прямоугольников, откуда площадь правого нижнего прямоугольника вдвое больше площади левого нижнего. То есть площадь неизвестного кусочка равна 6 см$^2$. Аналогично находим ответы в трёх других случаях: 24 см$^2$, 24 см$^2$ и 8/3 см$^2$.

**18.** *На столе лежит кучка одинаковых с виду монет, одна из которых фальшивая (то ли легче, то ли тяжелее обычной). Барон Мюнхгаузен положил часть монет в карман, оставив на столе не менее двух монет, и заявил, что фальшивая монета осталась на столе. Как проверить слова барона с помощью чашечных весов без гирь, потратив как можно меньше взвешиваний? (Доступны только монеты на столе, на весы можно класть любое число монет. Решение может зависеть от количества оставшихся монет.)*

Если на столе осталось чётное число монет, можно обойтись одним взвешиванием: разделить монеты на две кучки, равные по количеству монет, и положить эти кучки на две чаши весов. Если одна из чаш легче, то фальшивая монета есть, а если весы в равновесии, то фальшивой монеты на столе не было.

Если же монет на столе нечётное число, то одним взвешиванием не обойтись. Ведь если положить на весы не все монеты, они могут оказаться настоящими, и мы ничего не узнаем про оставшиеся. А все монеты класть на весы не имеет смысла – они разделятся не поровну, и куча с большим числом монет может перевесить и когда фальшивая монета есть, и когда её нет.

А двух взвешиваний хватит. Сначала делим пополам все монеты без одной и сравниваем. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета среди них. Иначе берём любую монету с весов (она настоящая) и сравниваем с оставшейся на столе монетой.

**19.** *Один мудрец заметил: «Наконец настал такой год, что количество зёрен, равное номеру года, можно разложить по клеткам шахматной доски так, чтобы ни на каких двух клетках не было поровну зёрен». В каком году произошла эта история?*

По условию, на всех клетках лежит разное число зёрен. Каким может быть наименьшее возможное число зёрен на доске? Самое маленькое число зёрен на клетке – это 0, следующее – 1, и так далее, то есть всего зёрен не меньше $0+1+2+\ldots+62+63=(0+63)+$ $+(1+62)+\ldots+(31+32)=63\cdot 32=2016$. Значит, впервые история могла произойти в 2016 году. Но в каждый следующий год зёрна тоже можно разложить, как требуется – например, добавляя по зёрнышку на клетку с наибольшим числом зёрен. Поэтому про следующие годы нельзя сказать «наконец-то настал такой год, что…», и история произошла в 2016 году.

**20.** *Квантик рисует в тетради четырёхклеточные буквы «Г» так, чтобы они не накладывались друг на друга. Из двух таких букв «Г» Квантик составил фигуру, имеющую ось симметрии, и даже несколькими способами (см. рис. 1). Помогите Квантику составить фигуру, имеющую ось симметрии, из любого количества таких букв «Г», большего 2.*

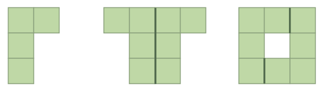


Рис. 1

Для чётного числа букв «Г» можно выложить в ряд друг за другом несколько одинаковых фигур, изображённых на рисунке 1 справа. Пример для трёх фигурок см. на рисунке 2.

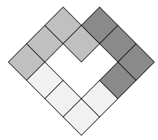


Рис. 2

Прикладывая к этой фигуре по две буквы «Г» слева и справа, получим примеры для 5, 7, 9 букв, и так далее (рис. 3).

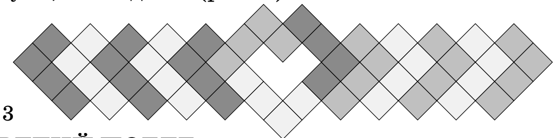


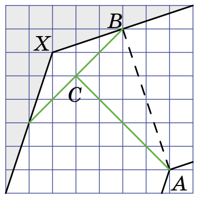
Рис. 3

## ТРЕТИЙ ПОБЕГ

Претензии генерала справедливы. Главная ошибка полковника (ныне сержанта) Джейлера – изменение периметра рва. Удивительно, но факт: беглец применил тот же самый Т-образный мостик, что и при первом побеге! А как ему это удалось – сейчас разберёмся.

Интуитивно кажется, что именно для преодоления *прямого* угла требуется пара досок *наименьшей* длины. Но в данном случае интуиция подводит. Оказывается, есть такой *тупой* угол поворота, при котором можно обойтись двумя досками по 1,9 метра, даже если ширина рва составляет 2,1 метра!

Убедимся в этом. На схеме изображён тот же самый угол $X$, через который заключённый сбежал в первый раз (только теперь этот угол стараниями Джейлера «затуплен»). Территория тюрьмы закрашена серым, снова использована синяя координатная сетка, но шаг её выбран так, чтобы расстояние от угла $X$ до противоположного угла $A$ равнялась 5 диагоналям клеточек сетки.




Как видно по клеточкам, $AB$ перпендикулярно сторонам рва. Значит, $AB$ равно ширине рва (2,1 м). Беглец положил доски, как показано на схеме зелёным. Обозначим длины зелёных отрезков через $x$ и проверим, что $x < 1{,}9$, то есть что длина досок достаточна.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника $ABC$ имеем $AB^2 = BC^2 + AC^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5x^2}{4}$. Но $AB = 2{,}1$ м, поэтому $\frac{5x^2}{4} = 2{,}1^2$, откуда $x = \frac{4{,}2}{\sqrt{5}}$ м. Эта величина меньше 1,9 метра. Поэтому преступник и сумел скрыться, а начальник тюрьмы (бывший) понёс заслуженное наказание. По сути дела, сам вырыл себе яму (в данном случае – ров)!

*Замечание.* Оказывается, именно этот выбранный Джейлером угол позволяет преодолеть ров с помощью Т-моста с минимальной длиной досок.

## НОСКИ И ПЕРЧАТКИ

Начнём со второго варианта – он, как ни странно, попроще. Здесь достаточно вытащить 12 перчаток: 11 левых и одну правую. В самом деле, так как имеется по 10 перчаток каждого цвета на одну руку, то среди 11 левых перчаток непременно будут перчатки обоих цветов. И потому к единственной правой перчатке непременно найдётся парная левая такого же цвета.

Убедимся, что 11 перчаток может не хватить. Итак, пусть мы вытащили 11 перчаток. Конечно, среди них должны быть и левые, и правые (иначе уж точно пары не будет). Но если имеется хотя бы одна левая перчатка, то правых не больше 10. Аналогично, и левых не больше 10. Поэтому вполне возможен вариант, когда все левые перчатки, взятые из ящика, окажутся чёрными, а все правые – коричневыми.

Так что ответ для второго варианта – 12 перчаток.

Перейдём теперь к первому варианту.

Очевидно, тут 12 перчаток тем более хватит. Но, может быть, можно обойтись меньшим количеством?

Как ни удивительно, возможность посмотреть на каждую перчатку сразу после её изъятия не даёт ничего! То есть при любой стратегии одиннадцатью перчатками не всегда можно обойтись. В самом деле, пусть мы каким-то образом вынули 11 перчаток. Рассуждая так же, как и выше, мы можем заключить, что среди них и левых, и правых перчаток не больше 10. А теперь представим себе, что в ящике сидит этакий Злой Рок, который, когда мы собираемся достать левую перчатку, любезно подсовывает нам чёрную, а когда мы хотим взять правую – то коричневую. Тогда, как бы мы ни хитрили, все добытые нами левые перчатки по цвету не совпадают с правыми.

## ПОЧЕМУ СВЕТОЛЮБИВЫЕ ДЕРЕВЬЯ ЕЩЁ НЕ ВЫМЕРЛИ?

Помеченный отрезок побега вырос в 2015 году, как и предыдущий. Это доказывается тем, что на нём и на первом приросте 2015 года нет боковых побегов. Дело в том, что второй прирост развивается только из верхушечной почки, боковые почки на всех побегах активируются только на следующий год. Кроме того, боковые побеги, развившиеся на побеге 2014 года одновременно с помеченным, явно выросли в 2015 году – они вторых приростов не давали, а вырасти раньше не могли – тогда бы на них тоже активировались почки (хотя бы верхушечные) или они бы погибли.

## LXXXII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ. II ТУР.

**1. Ответ:** 112. Заметим, что если число $n$ чётно, то количество чисел, меньших $n$, нечётно. Эти числа могут поровну распределиться по двум группам из 99 чисел, описанных в условии, только в том случае, когда одно из них стоит напротив числа $n$. Итак, напротив каждого чётного числа должно стоять меньшее число.

Теперь ясно, что напротив числа 2 обязательно стоит 1, потому что это единственное число, которое меньше 2. Далее, напротив 4 может стоять только 3 (ведь мы уже знаем, что числа 1 и 2 стоят напротив друг друга). Аналогично, напротив 6 стоит 5 и так далее. Продолжая рассуждение, получим, что напротив числа 112 обязательно стоит 111.

**2.** Рассматриваемое натуральное число должно быть чётным. В самом деле, в противном случае все его делители нечётны, а само число равно сумме 18 нечётных делителей, то есть всё-таки чётное.

Далее заметим, что среди 19 делителей, дающих в сумме наше число, должен быть хотя бы один чётный (потому что сумма 19 нечётных чисел нечётна, и значит, не может быть равна нашему числу). Пусть этот чётный делитель равен $2x$. Чтобы представить наше число в виде суммы 20 делителей, возьмём предыдущую сумму 19 делителей и заменим в ней $2x$ на $x + x$.

**3.** В течение первых 10 операций заведомо исчезнет зазор между левой стенкой и ближайшим к ней левым чемоданом. Действительно, либо этот «левый чемодан» будет в свой ход придвинут к стенке, либо если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером, то самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к стенке. В результате один из чемоданов – назовём его $A$ – окажется стоящим вплотную к стенке и при последующих действиях кладовщика больше не будет двигаться.

В течение следующих 10 операций заведомо исчезнет зазор между чемоданом $A$ и чемоданом, ближайшим к нему слева. Действительно, либо этот «ближайший слева чемодан» будет в свой ход придвинут к чемодану $A$, либо, если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером (кроме чемодана $A$), то самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к чемодану $A$. В результате чемодан $A$ стоит вплотную к стенке, а вплотную к нему расположен ещё один чемодан – назовём его $Б$, – причём при последующих действиях кладовщика оба чемодана больше не будут двигаться.

Продолжая эти рассуждения, мы получим, что после 30 операций у левого края стенки будут вплотную стоять уже три чемодана, после 40 операций – 4 чемодана и так далее. Наконец, после 100 операций все 10 чемоданов будут стоять слева на полке без зазоров. Перемещение чемоданов на этом завершится.

**4.** Для решения задачи полезно знать следующий факт, который мы для удобства сформулируем в терминах знакомства: *не существует компании, состоящей из нечётного числа людей, в которой каждый человек имеет нечётное количество знакомых* (*среди людей из этой компании*).

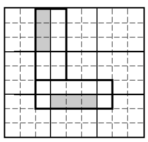
**Доказательство.** Пусть все знакомые пожмут друг другу руки. Так как в каждом рукопожатии участвует две руки, значит, суммарное количество «протянутых рук» чётно. С другой стороны, каждый человек протягивал руку нечётное число раз. Чтобы суммарное число «протянутых рук» в этой ситуации получилось чётным, число людей должно быть чётным.

Приступим к решению задачи. Каждый мужчина в среду сказал правду, значит, у него нечётное число знакомых (поскольку среди них мужчин на 1 больше, чем женщин). А каждая женщина сказала правду в четверг, и по той же причине у неё нечётное число незнакомых.

Предположим, что на острове 2015 жителей. Тогда у каждого человека количество знакомых и количество незнакомых в сумме дают 2014 (чётное число). Следовательно, у каждого человека количество знакомых имеет ту же чётность, что и количество незнакомых.

Таким образом, у каждой женщины нечётное количество незнакомых и, следовательно, нечётное количество знакомых. Значит, каждый из 2015 жителей имеет нечётное число знакомых, чего быть не может.

**5.** Сначала нарисуем разметку, разбивающую исходный квадрат $60 \times 60$ на квадратики $3 \times 3$. Заметим, что у каждой плиточки $2 \times 5$ сторона длины 5 разбита этой разметкой либо на две части (их длины 2 и 3), либо на три части (с длинами 1, 3, 1). Следовательно, на каждой плиточке имеется прямоугольник $1 \times 3$, не разбитый на части линиями разметки (на рисунке показаны примеры таких прямоугольников), – закрасим на каждой плиточке один такой прямоугольник.



Очевидно, закрашенные прямоугольники не пересекаются, так как лежат в разных плиточках. Если в каком-то квадрате $3 \times 3$ закрашено больше одного прямоугольника $1 \times 3$, то они расположены одинаково (все горизонтально или все вертикально), поскольку не пересекаются. Следовательно, каждый квадрат разметки $3 \times 3$ можно так разбить на прямоугольники $1 \times 3$, что все закрашенные прямоугольники будут принадлежать этому разбиению.

## СЛОВА В КОСТЮМАХ

Глагол «похитить» также связан со словом «хитрый» (и даже «хищный»). Нужно быть достаточно хитрым и ловким, чтобы привести окружающих в восхищение.

«Трус» – это землетрясение. Современный трус – тот, кто трясётся от страха.

«Прелестный» связано со словом «лесть» и имело в древности только негативное значение («соблазнительный», «ведущий на ложный путь»).

Выражение «очи долу, ум горе» означает быть скромным и не отвлекаться на пустяки, думая при этом о высоком и важном. «До́лу» – вниз, «горе́» – наверх. Связь с долинами (тем, что внизу) и горами (вверху) неслучайна.

## РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

**1.** Альфа Центавра – самая яркая звезда в созвездии Центавра (или, как теперь чаще пишут, Кентавра). Значит, герои романа полетят к (чему?) *Альфе* (чего?) *Центавра*. **Ответ:** (А).

**2.** У глаголов *жать* ‘сжимать’ и *жать* ‘срезать колосья’ совпадает неопределённая форма, а формы 1 л. ед. ч. настоящего времени различаются: *жму* и *жну*. Денис Иванович Фонвизин, бывший не только выдающимся писателем и поэтом, но и тонким и проницательным филологом, справедливо заметил, что пар глаголов, у которых, наоборот, совпадают формы 1 л., а неопределённая форма различна, в русском языке никак не меньше (а на самом деле – ощутимо больше). Сам Фонвизин приводил в пример глаголы *петь* и *поить* (1 л. пою), а также *лазить* и *ладить* (1 л. *лажу*). К ним можно добавить, например, *возить* и *водить* (1 л. *вожу*), *тузить* и *тужить* (1 л. *тужу*) и некоторые другие пары. **Ответ:** (Б).

**3.** Подставляя поочерёдно к фамилии Ктифф варианты имени, можно заметить, что сочетание *Тити Ктифф* похоже по звучанию на *детектив* – синоним слова *сыщик*. Таким образом, имя этого персонажа недвусмысленно намекает на его профессию. **Ответ:** (Г).

**4.** В первый момент может показаться, что ни один из приведённых вариантов ответа не рифмуется со словом *часто*; выбрать между ними по смыслу тем более невозможно. Однако правильный ответ легко получить, если вспомнить, что для обозначения числа 150 в русском языке есть особое (красивое и выразительное, хотя в последнее время, к сожалению, употребляемое довольно редко) слово *полтораста*. Им и заканчивается последняя строка стихотворения. **Ответ:** (Г).