Игорь Акулич

Коровы Исаака Ньютона

По некоторым сведениям, эту сельскохозяйственную задачу предложил сам Исаак Ньютон, или, по крайней мере, кто-то из его современников[1]:

Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 *коров поели бы её в* 24 *дня, а* 30 *коров – в* 60 *дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в* 96 *дней?*

Прямой и с виду естественный подход наталкивается на непреодолимые трудности. В самом деле, 96 дней больше, чем 24 дня, ровно в 4 раза. Поэтому если 70 коров съедят траву в 24 дня, то, чтобы трапеза продолжалась вчетверо дольше, количество коров надо во столько же раз уменьшить, и оно становится равным $70 : 4 = 17{,}5$. При таком ответе сразу вспоминаются знаменитые *полтора землекопа* Виктора Перестукина[2], но это ещё полбеды. Хуже другое: если опираться на другие данные условия, а именно не на 70 коров, а на 30, слопавших траву за 60 дней, то $96 : 60 = 1{,}6$, и потому потребное число коров становится равным $30 : 1{,}6 = 18{,}75$. В результате возникает мрачное ощущение безысходности, слегка смягчённое надеждой, что условие просто-напросто содержит ошибку, а значит, и браться за такую задачу не имеет смысла.

Между тем ошибок в задаче нет, и более бдительные сразу обратят внимание на первое предложение – о растущей траве. Вот где зарыта собака[3] – оказывается, пока коровы едят, трава успевает подрасти, и запас кормов на лугу увеличивается (хотя и не может обеспечить животным бесконечно долгое питание).

Как же решать такую задачу? Возможный подход предлагает сам Я. И. Перельман в той же книге. Процитируем его рассуждения.

Введём вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях её запаса на лугу. В одни сутки прирастает y, в 24 дня – $24y$; если общий запас принять за 1, то в течение 24 дней коровы съедают $1 + 24y$. В сутки всё стадо (из 70 коров) съедает $\frac{1+24y}{24}$, а одна корова съедает $\frac{1+24y}{24 \cdot 70}$.

[1] Об этом сообщает Я. И. Перельман в книге «Занимательная алгебра» (Глава II, статья «Коровы на лугу»).

[2] См. сказочную повесть Л. Б. Гераскиной «В стране невыученных уроков».

[3] В данном случае верней было бы сказать «зарыта корова».

Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что одна корова съедает в сутки $\frac{1+60y}{30\cdot 60}$. Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обоих стад одинаково. Поэтому

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+60y}{30\cdot 60},$$

откуда $y=\frac{1}{480}$. Найдя y (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+24\cdot\frac{1}{480}}{24\cdot 70}=\frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров x, то

$$\frac{1+96\cdot\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600},$$

откуда $x=20$.

20 коров поели бы всю траву в 96 дней.

Вот и всё решение. Ничего не скажешь – добротно и основательно. Но уж очень громоздко. Пока до конца дочитаешь – уже и начало позабудешь. Нельзя ли как-нибудь короче?

Можно. И главной опорой в этом послужат не герои сюжета – коровы, а… сам автор задачи! Исаак Ньютон был не только гениальным математиком, но и не менее гениальным физиком (законы Ньютона говорят сами за себя!). Великий учёный поставил на строгие математические рельсы принцип относительности движения и умело его использовал в решении многих проблем. Так давайте и мы так переформулируем задачу, чтобы на передний план вышла её физическая сущность. Для этого заменим луг с коровами рекой с катером. И вот что у нас выходит.

Назовём собственной скоростью катера его скорость при движении в стоячей воде. Если катер поплывёт вверх по течению реки с собственной скоростью 70 км/ч, то он доберётся до пункта назначения за 24 часа, а если он поплывёт с собственной скоростью 30 км/ч, то

он доберётся до пункта назначения за 60 *часов. С какой собственной скоростью ему надо плыть, чтобы достичь цели за* 96 *часов?*

Здесь количество коров преобразовалось в скорость катера, а растущая трава – во встречное течение (правда, сами числовые значения получаются далёкими от реальных, но кого это волнует?). Далее, не слишком отклоняясь от Перельмана, обозначим собственную скорость катера через x, а скорость течения через y. Тогда одно и то же расстояние, которое проплыл (бы) катер, можно записать тремя способами, что порождает вот такую систему уравнений:

$$(70-y)\cdot 24=(30-y)\cdot 60=(x-y)\cdot 96.$$

Решается она проще пареной репы, а главное – проста и наглядна. Ответ, естественно, совпадает с тем, что был получен ранее: $x=20$ (значение же y нас вообще-то не интересует, но если полюбопытствовать и вычислить его, оно оказывается равным $3\frac{1}{3}$. Сами сообразите, почему оно не совпадает с вычисленным ранее значением $\frac{1}{480}$)[4].

Как видим, знаменитое театральное восклицание: «Автора!» можно с успехом применять при решении математических задач. Чего и нашим читателям желаем. А в заключение, чтобы убедиться, что описанный приём освоен прочно и надёжно, попробуйте решить другую, более сложную задачу, приведённую Перельманом в той же «Занимательной алгебре»:

Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$ *га,* 10 *га и* 24 *га. Первый прокормил* 12 *быков в продолжение* 4 *недель; второй –* 21 *быка в течение* 9 *недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение* 18 *недель?*

Как и следовало ожидать, решение, приведённое в книге Перельмана, заняло без малого две страницы текста (не будем его даже приводить). Но вы, конечно, обойдётесь меньшими затратами. Вперёд!

[4] А тому, кто всё-таки не сообразил, подскажем: значение $\frac{1}{480}$ появляется при обозначении всего пути (либо же его эквивалента – исходного запаса травы на лугу) через единицу, как это сделал Перельман. Мы же обошлись без этого и даже вообще длину пути не вычисляли – зачем нам лишняя работа? Между прочим, скорость течения реки, равная $3\frac{1}{3}$, свидетельствует о том, что будь скорость катера не больше этой величины – и он никогда не доберётся до пункта назначения. В переводе на коровий язык это означает: если коров не больше $3\frac{1}{3}$, то они могут сколь угодно долго питаться на лугу, в противном случае продовольственный кризис неизбежен.

Художник Мария Усеинова