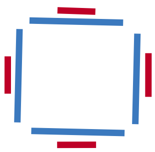
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 6)

26. *За круглым столом сидят десять человек: рыцари и лжецы (и те, и другие присутствуют). Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждого спросили, кто сидит справа от него – рыцарь или лжец. Могло ли число ответов «справа от меня сидит лжец» равняться а) двум; б) одному?*

а) **Ответ:** может. Например, если за столом сидит 9 рыцарей и 1 лжец.

б) **Ответ:** не может. Так как присутствуют и лжецы, и рыцари, то найдётся рыцарь, справа от которого сидит лжец, а также лжец, справа от которого сидит рыцарь. Оба они ответят, что справа от них сидит лжец, поэтому таких ответов никак не меньше 2.

27. *Ноутик нарисовал на плоскости несколько отрезков, которые не пересекаются друг с другом. Всегда ли Квантик сможет соединить некоторые из их концов другими отрезками так, чтобы получилась одна несамопересекающаяся ломаная?*



Ответ: не всегда. Пусть отрезки проведены, как на рисунке. Посмотрим на верхний красный отрезок. Его концы можно соединить только с концами соседнего синего отрезка. Но если соединить оба конца красного отрезка с концами синего, то получим замкнутый кусок, и построить ломаную не удастся. Значит, один из концов красного отрезка ни с чем не соединён. Такое возможно только если эта точка – один из двух концов ломаной. Но то же самое верно и для любого другого красного отрезка. А у ломаной не может быть четырёх концов. Значит, построить ломаную нельзя.

28. *Найдите какие-нибудь два различных натуральных числа, больших пяти, которые и в сумме, и в произведении дают число-палиндром. (Напомним, что число называется палиндромом, если цифры в нём идут слева направо в том же порядке, что и справа налево, например: 717, 55, 3223.)*

Ответ: 11 и 22. Есть и другие варианты, например: 18 и 37, 102 и 201, …

29. *Если одну из сторон квадрата уменьшить на 4 см, а вторую увеличить на 5 см, площадь получившегося прямоугольника станет меньше площади квадрата. Уменьшится или увеличится площадь, если одну из сторон этого квадрата уменьшить на 1 см, а вторую увеличить на 2 см?*

Ответ: площадь увеличится. Пусть длина стороны квадрата x см, тогда его площадь x^2 см^2. Стороны второго прямоугольника равны $x-1$ см и $x+2$ см, его площадь – $(x-1)(x+2)$ см^2. Вычтем из площади прямоугольника площадь квадрата: $(x-1)(x+2)-x^2=x-2$. Так как сторону квадрата можно уменьшить на 4 см, то $x>4$. Значит, $x-2>2>0$, и площадь прямоугольника больше площади квадрата.

Упражнение: приведите пример квадрата, для которого выполняются условия этой задачи.

30. а) *Двенадцать ребят решили сыграть в волейбол. На каждую игру тренер разбивает их на две команды по 6 человек. Он хочет провести несколько игр, чтобы в итоге каждый сыграл с каждым в одной команде. Какое наименьшее число игр потребуется?*

б) *Тут прибежало ещё 10 человек, и ребята решили сыграть в футбол. Теперь тренер разбивает их на две команды по 11 человек и снова хочет провести несколько игр, чтобы в итоге каждый сыграл с каждым в одной футбольной команде. Какое наименьшее число игр потребуется?*

а) **Ответ:** потребуется 3 игры. Возьмём игрока Васю. Всего ребят кроме него 11, и с каждым он должен сыграть в одной команде. Каждую игру он играет в одной команде с пятью другими ребятами. Значит, за две игры он сыграет только с 10 ребятами, и нужна будет третья игра.

Трёх игр хватит. Разобьём ребят на 4 группы по 3 игрока каждая и назовём группы A, B, C, D. Пусть в первой игре группы A и B играют против C и D, во второй игре – A и C против B и D, в третьей – A и D против B и C. Тогда каждый сыграет с каждым.

б) **Ответ:** потребуется 4 игры.

Предположим, что трёх игр хватит. Тогда пусть в первую игру игроки разбились на команды A и B, а во вторую – на команды 1 и 2. Нарисуем табличку 2×2 и расставим в неё школьников. В первый столбец поставим команду A: в первой клетке – тех, кто потом играл в команде 1, а во второй клетке – тех, кто потом играл в команде 2. Аналогично поставим во второй столбец команду B.

Теперь у нас столбцы соответствуют командам A и B, а строки – командам 1 и 2. Значит, число детей в каждом столбце и в каждой строке равно 11. Пусть в верхней левой клетке стоит x человек. Тогда в соседних с ней клетках должно быть по $11-x$ человек, а в оставшейся клетке – снова x человек.

	A	B
1	x	$11-x$
2	$11-x$	x

Посмотрим, как должна проходить третья игра, чтобы каждый сыграл с каждым. Ясно, что есть только одна возможность: все дети из двух противоположных клеток обязаны быть в одной команде, и все дети из двух других противоположных клеток тоже должны быть в одной команде. Получаются две команды: в одной $2x$ человек, а в другой $22-2x$. Оба эти числа чётные, а должны равняться по 11 – противоречие. Значит, трёх игр не хватит.

Четырёх игр хватит. Разобьём ребят на пять групп A, B, C, D, E, так что в первой группе 6 человек, в группах B, C, D по 5 человек, а в группе E всего 1 человек. Пусть в первой игре A и B играют против C, D, E. Во второй – A и C против B, D и E. В третьей – A и D против B, C, E. Теперь в одной команде не играли только A и E – добавляем к ним любых четырёх человек и получившуюся команду ставим против оставшихся.

ВЕСЫ НА ВЕСАХ («Квантик» № 7)

Ответ: наибольшее N равно 7.

Решение основывается на той же идее: неисправные весы *легче* исправных. Покажем, как действовать при $N=7$. Сначала покажем, как за одно взвешивание можно определить четверо исправных весов. Пронумеруем весы номерами от 1 до 7. На левую чашку весов 1 поставим весы 2 и 3, на правую – весы 4 и 5 (весы 6 и 7 в первом взвешивании не участвуют).

а) Если равновесие, то либо весы 1 сами неисправны (ведь неисправные весы могут показывать что угодно), либо весы 1 исправны и все весы, находящиеся на чашках весов 1, также исправны (иначе мы бы увидели, что чаша с неисправными весами легче). В любом случае, весы 2, 3, 4 и 5 исправны, а неисправные среди трёх остальных.

б) Если одна чаша перевесила, то, опять же, либо весы 1 сами неисправны (как и при равновесии), либо, если весы 1 исправны, неисправные весы на более лёгкой чаше. Поэтому весы на более тяжёлой чаше, а также весы 6 и 7 исправны, а неисправные среди трёх остальных.

Итак, мы нашли четверо исправных весов. Осталось выделить неисправные среди оставшихся трёх. Выбираем любые исправные весы, на одну их чашку ставим одни «подозрительные» весы, на другую – вторые, а третьи не трогаем. Тогда весы, оказавшиеся при втором взвешивании на более лёгкой чашке, и будут неисправными, а если получится равновесие, то неисправны весы, не участвовавшие во взвешивании. Всё!

Таким образом, всегда можно выделить за 2 взвешивания неисправные весы среди семи весов! Но это ещё не всё – надо доказать, что если весов не меньше 8, то не удастся гарантированно выделить неисправные весы за 2 взвешивания. Для начала покажем, что как бы мы ни расставили весы в первом взвешивании, в некотором исходе найдутся как минимум четверо весов, которые могут быть неисправными. Мы не будем рассматривать случаи, когда на чаши весов поставлено не поровну весов: ведь если сломанные весы лишь незначительно отличаются по весу от настоящих, то перевешивать всегда будет чаша с бóльшим числом весов и мы ничего не узнаем.

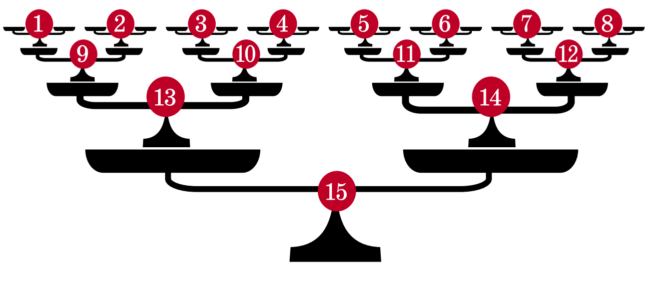
а) Пусть на каждую чашу весов поставили двое или одни весы. Тогда во взвешивании не участвует как минимум трое весов. Если получилось равновесие, то неисправными могут оказаться взвешивающие весы, а могут и любые весы, не участвующие во взвешивании. Всего не менее четырёх «подозрительных» весов.

б) Пусть на каждую чашу весов поставили не менее трёх весов. Если при этом одна чашка перевесит, то неисправными могут быть любые весы на лёгкой чаше, а также сами весы, на которых производилось взвешивание, то есть также не менее $3+1=4$ весов.

Итак, после первого взвешивания всегда может оказаться, что осталось не менее четырёх весов, каждые из которых могут быть неисправны. Можно ли гарантированно выделить неисправные весы за одно оставшееся взвешивание? Легко видеть, что нет. В самом деле, возможны 3 исхода второго взвешивания (или левая чашка перевесила, или правая, или равновесие), а возможных неисправных весов – 4. Понятно, что какому-то исходу второго взвешивания будут соответствовать не менее двух возможных неисправных весов, и различить их никак нельзя.

Замечание 1. Можно поставить и более общую задачу: каково наибольшее количество весов, среди которых требуется выявить одни неисправные, если разрешено произвести m взвешиваний? Ответ, по-видимому, такой: это значение равно $3^m - 2$ (в решённой нами задаче $m = 2$, и $3^2 - 2 = 7$). При этом первое взвешивание таково: на каждую чашу любых выбранных весов кладём по $3^{m-1} - 1$ весов, и ещё столько же весов во взвешивании не участвуют. Это позволяет при любом исходе первого взвешивания выделить ровно 3^{m-1} весов, которые могут быть неисправны, а также определить заведомо исправные весы (все остальные). Далее, имея исправные весы, можно за $m - 1$ взвешиваний определить неисправные весы из 3^{m-1} подозрительных. Схему взвешиваний читатель, думается, без труда разработает сам.

Замечание 2. А что, если разрешить ставить любое количество весов на любую чашу любых весов (то есть разрешать «весы на весах на весах» и так далее), и одним «взвешиванием» считать показания всех весов составленной нами конструкции? Оказывается, тогда наибольшего N не существует – например, для любого количества весов, на 1 меньшего степени двойки, можно выявить неисправные весы за два «взвешивания». Пример нужной конструкции для первого «взвешивания» при $N = 15$ изображён на рисунке.



ПИРАМИДКА ИЗ КУБИКА («Квантик» № 7)

Указание: попробуйте сложить пирамидку так, чтобы в каждой вершине пирамидки оказалась пара противоположных вершин куба.

ЛЕГЕНДЫ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

• Ребята выяснили, что масса 1 м^3 воздуха при нормальных условиях составляет приблизительно 1,25 кг. Пусть размеры класса такие: длина 10 м, ширина 5 м, высота 3 м. Объём класса получается 10 м × 5 м × 3 м = 150 м^3. Масса воздуха в классе от 150 до 200 кг. Для оценки этого достаточно.

• В 1876 году вышел роман Марка Твена «Приключения Тома Сойера». Том родился в маленьком городке Сент-Питерсберг, штат Миссури. В романе ему 12 лет. Некоторые расхождения в названиях городов объясняются особенностями произношения в США и России.

• Подозрение пало на Петрова. У него в паспорте написано: год рождения 1987, место рождения – Санкт-Петербург. Но с 26 января 1924 года по 6 сентября 1991 года город назывался Ленинград. Мошенник не учёл этого, когда изготавливал себе фальшивый паспорт.

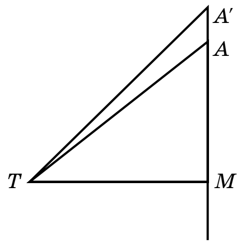
КОРОВЫ ИСААКА НЬЮТОНА

Здесь имеются три разных луга, поэтому при переходе к «водяному» эквиваленту нам придётся иметь дело с тремя катерами на трёх разных реках. Как и ранее, количество коров на третьем лугу (оно же – скорость третьего катера) обозначим через x. Теперь следует заметить, что как скорости роста травы на лугах, так и первоначальные её запасы пропорциональны площадям лугов. В «кинематическом» эквиваленте это значит: скорости течения рек равны y, $10y$ и $24y$ соответственно, а расстояния, которые должны проплыть катера, равны z, $10z$ и $24z$ (где y и z – некоторые пока неизвестные величины). А далее составляем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$(12 - 3\tfrac{1}{3}y) \cdot 4 = 3\tfrac{1}{3}z$$
$$(21 - 10y) \cdot 9 = 10z$$
$$(x - 24y) \cdot 18 = 24z$$

Искомое значение x, которое нас интересует, фигурирует только в последнем уравнении, поэтому без предварительного вычисления y и z обойтись затруднительно. Поэтому проще всего поделить первое уравнение на второе (или наоборот) – и z сократится, что позволит нам найти $y = \frac{9}{10}$. Далее, подставив это значение в первое либо второе уравнение, находим $z = \frac{54}{5}$. Наконец, подставив оба найденных значения в последнее уравнение, определяем $x = 36$. Итак, третий луг способен прокормить 36 быков в течение 18 недель.

ЧЕТВЁРТЫЙ ПОБЕГ



Пусть T – тюрьма, M – мост, A – точка на берегу на расстоянии 4 км от моста (см. рисунок). Чтобы сбежать, заключённому достаточно бежать со скоростью 3 км/ч к точке A' чуть выше точки A. Проверим это.

Куда бы ни побежал заключённый, пройдёт ровно 105 минут, прежде чем первая группа преследователей его догонит. Действительно, когда охрана пускалась в погоню, беглец уже 15 минут был в пути, а значит, пробежал $\frac{3}{4}$ км. Отставание $\frac{3}{4}$ км сократится до нуля за $\frac{3}{4} : (3{,}5 - 3) = \frac{3}{2}$ часа, то есть 90 минут, где $3{,}5 - 3 = 0{,}5$ км/ч – это скорость сближения охраны и беглеца. Всего $15 + 90 = 105$ минут.

Беглец же добежит до точки A' чуть больше, чем за 100 минут. Действительно, по условию $TM = 3$ км. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника TMA, $TA = 5$ км. Расстояние 5 км беглец проходит за $\frac{5}{3}$ часа, то есть за 100 минут. Поэтому если мы возьмём точку A' достаточно близко к точке A, то беглец успеет дойти до A' быстрее, чем за 105 минут.

Убедитесь сами, что до любой точки A', которая выше точки A, беглец дойдёт быстрее, чем вторая группа охраны. Мы лишь проверим, что до точки A беглец и охранники добираются за одинаковое время, то есть за 100 минут. Действительно, охрана оказалась у моста через 20 минут. Она преодолела 4 км вдоль реки до точки A за $\frac{4}{3}$ часа, то есть за 80 минут. Итого $20 + 80 = 100$ минут – столько же, сколько у беглеца.

ПОЧЕМУ ПЧЁЛЫ ОБЩЕСТВЕННЫЕ, А БАБОЧКИ НЕТ?

1. Муравьи-амазонки стали самыми настоящими рабовладельцами. Их прекрасно вооружённые солдаты врываются в муравейники других видов, убивая стражу, выносят оттуда личинок и куколок и докармливают их в своём гнезде (силами рабов, захваченных в предыдущих набегах). Вышедшие из куколок рабочие запоминают запах гнезда амазонок как «свой» и покорно работают на новую колонию, считая родных сестёр (оставшихся в материнском муравейнике) чужаками.

2. Эти муравьи стали «социальными паразитами». Матка проникает в гнездо обычного вида муравьёв, рабочие которого принимают её, поскольку она пахнет похоже, и начинают о ней заботиться, как и о своих матках. Паразитке остаётся только откладывать яйца, о которых позаботятся местные рабочие, а затем новое поколение самцов и самок вылетает из муравейника и отправляется заселять новые.

ПАТТЕРН-ГОЛОВОЛОМКА

Решение автора приведено на рисунке 1. Интересно, что этим узором можно замостить бесконечную плоскость (так, чтобы каждая пустая область совпадала с одной из исходных фигурок), но это уже совсем другая задача.

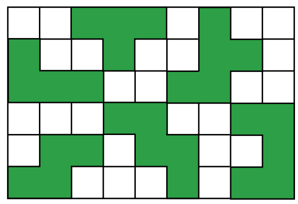


Рис.1

Приводим также решение Алексея Лаптиева (рис. 2).

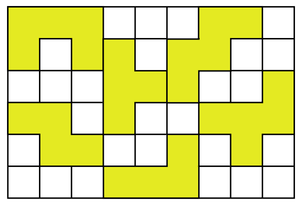


Рис.2

СЛОВОБУСЫ

Андрей мог найти на первом Катином словобусе: сет, Ом, си, пот и др.

На втором Катином словобусе можно прочитать: кони, пора, кара, жар, пир, жир, зри, они, кон, Ира и мн. др.

Недостатки второго словобуса: слова «кино» и «пони» содержат повторяющуюся букву «н» в одном и том же месте. Из-за этого получается меньше комбинаций. Ещё можно посмотреть на сочетание гласных и согласных: в коротких словобусах «зр» и «зн» не очень удобны.