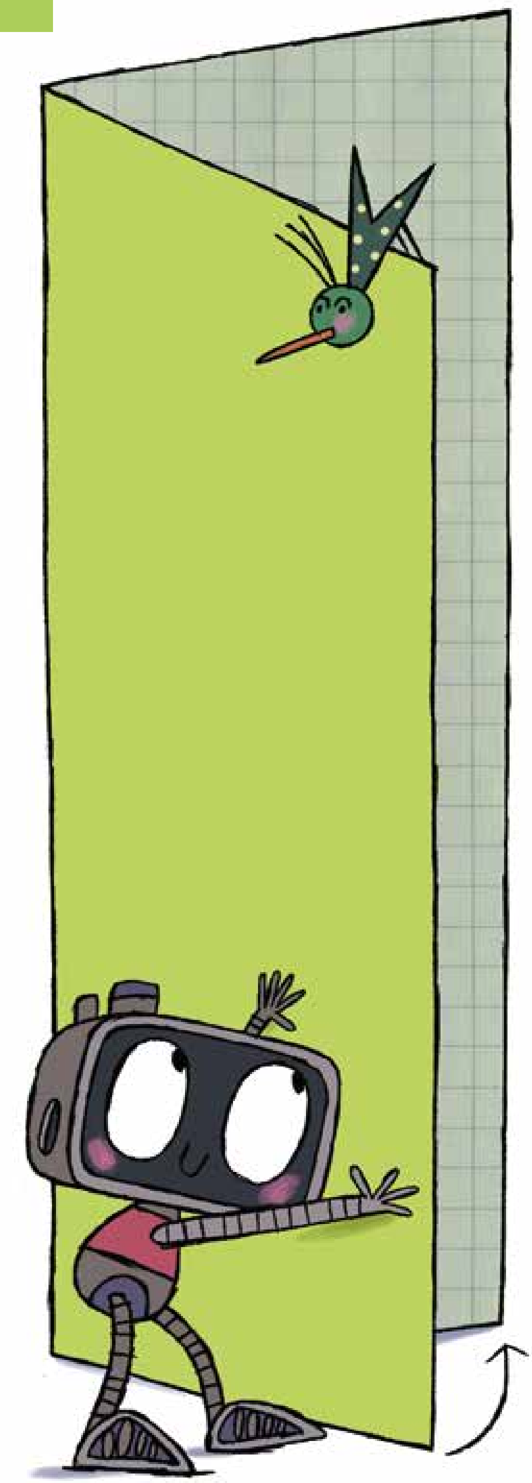
Математический кружок

ПЕРЕГИБАЯ бумагу, получаем задачу.

Александр Блинков



Многие из вас наверняка уже знакомы с задачами о перегибании бумаги.[1] Они привлекательны своей естественностью и давно встречаются на турнирах и олимпиадах. Причём это задачи не только на построение, но и на доказательство, и на вычисление. Основные методы их решения основаны на простом соображении: перегибая лист, мы получаем фигуры, симметричные относительно линии сгиба, и возникает идея использовать равенство симметричных отрезков, углов, треугольников... Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1 (*Д. Прокопенко, VII Московская устная олимпиада, 7 класс*). У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, а потом разогнули обратно. A – общая точки линии сгиба и ровного края (рис. 1*а*). Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A, используя только перегибание бумаги.

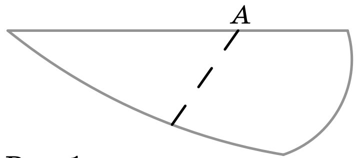


Рис. 1*а*

Решение. Перегнём лист по данной линии AB, тогда ровный край листа займёт положение луча AC (рис. 1*б*). Теперь совместим другую часть этого края с лучом AC и получим линию сгиба AD.

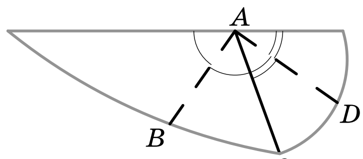


Рис. 1*б*

Угол BAD – искомый, так как образован биссектрисами двух смежных углов.

При сгибании прямоугольных листов бумаги часто возникают прямоугольные треугольники, свойствами которых можно воспользоваться для решения.

Задача 2 (*Д. Шноль, XVIII турнир математических боёв имени А.П. Савина, 7 класс*). Квадратный лист бумаги сначала сложили вдвое, а затем так, как

[1]См., например, статью А. Воронцова и А. Сгибнева «Опыты с бумагой» («Квантик» № 12 за 2013 год) или книгу К. Хаги «Оригамика. Геометрические опыты с бумагой» (М.: МЦНМО, 2012).

показано на рисунке 2*а*. Чему равен отмеченный угол?

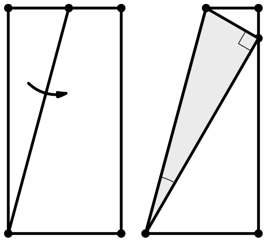


Рис. 2*а*

Решение. Заметим, что при сложении квадрата вдвое получился прямоугольник с отношением сторон $2:1$. Пусть $ABCD$ – четырёхугольник, получившийся в итоге, E – вершина прямоугольника, попавшая при втором складывании на сторону CD (рис. 2*б*). Тогда в прямоугольном треугольнике EAD катет AD в два раза меньше гипотенузы AE, следовательно, $\angle AED = 30°$. Значит, $\angle EAD = 60°$, а искомый угол является половиной угла, дополняющего угол EAD до угла прямоугольника.

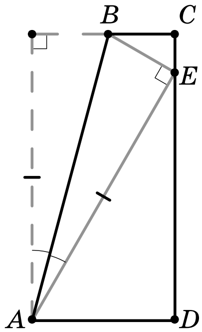


Рис. 2*б*

Таким образом, $\angle EAB = \frac{90° - 60°}{2} = 15°$.

Отметим, что попутно показано, каким образом из квадратного листа бумаги можно сложить углы 15°, 30°, 60° *и* 75°.

А теперь – более сложная задача, возникающая при сгибании квадратного листа. При её решении симметрия используется очень красиво. Удивительно, что придумал эту задачу ученик 5 класса!

Задача 3 (*С.Струнков, XX турнир математических боёв имени А.П.Савина, 7 класс*). Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M – середина CD. Согнём квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M, а середина AD попала на диагональ AC. Разогнём лист, отрезок сгиба обозначим MX. Теперь согнём квадрат так, чтобы сгиб снова проходил через точку M, а середина BC попала на диагональ BD. Разогнём лист, отрезок сгиба обозначим MY. Докажите, что треугольник MXY – равносторонний.

Решение. Пусть P – середина BC, Q – середина AD, R – точка, симметричная точке Q относительно MX (рис. 3). Тогда треугольники MXQ и MXR равны из симметрии относительно MX, а треугольники MXQ и MYP равны из симметрии всей

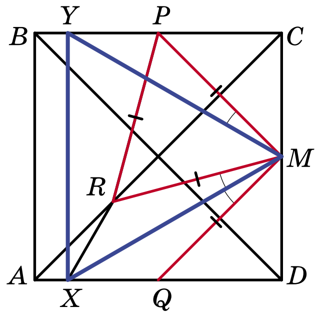
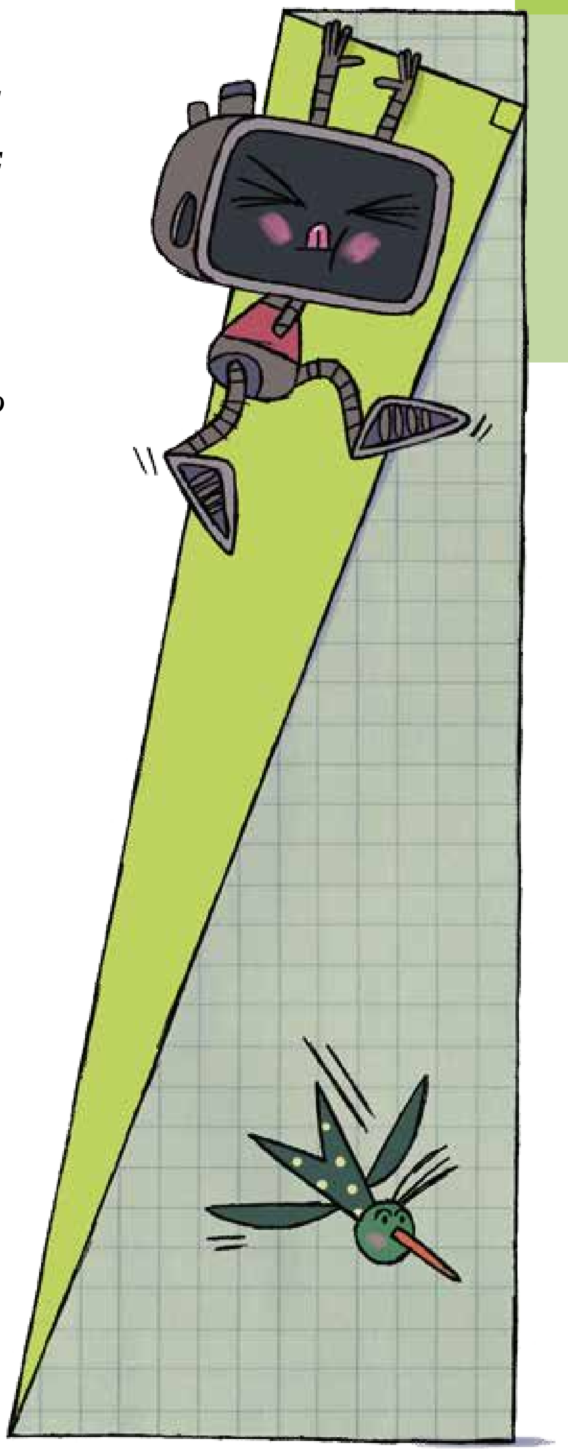
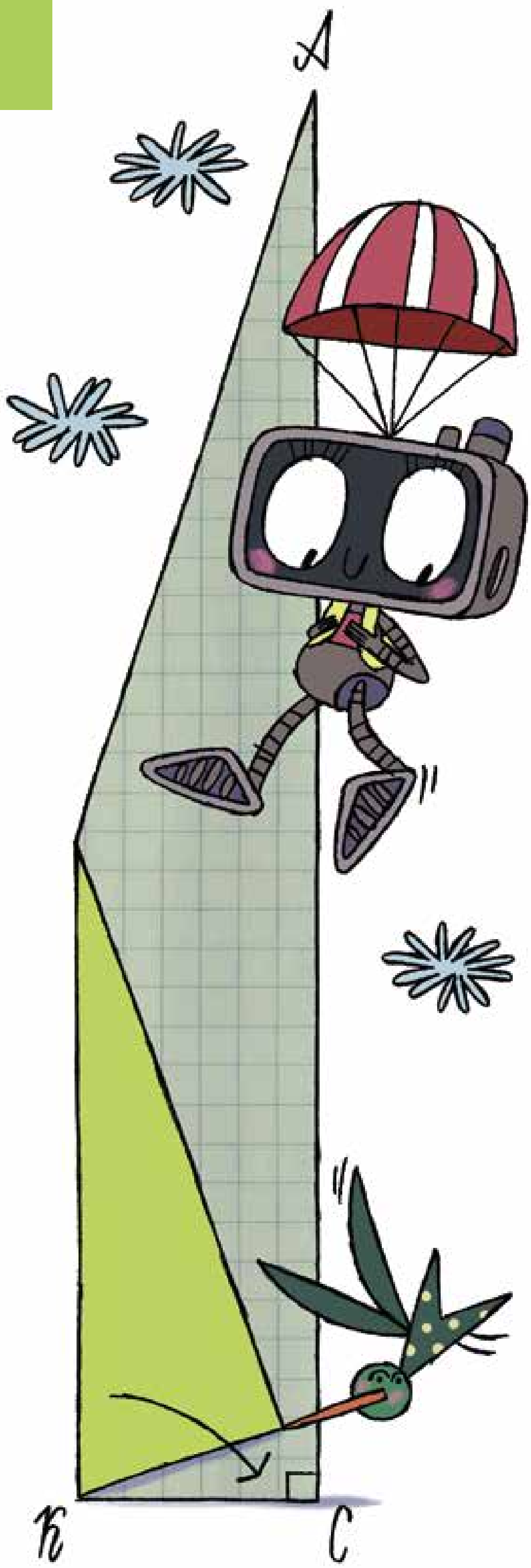


Рис. 3





картинки относительно горизонтальной оси. Отсюда $MX = MY$ и углы XMR и YMP равны. Если мы докажем, что угол XMY равен 60°, то из равенства $MX = MY$ будет следовать, что MXY – равносторонний. Из равенства углов XMR и YMP следует, что углы XMY и RMP равны. Следовательно, для того, чтобы доказать равенство сторон треугольника MXY достаточно доказать, что равносторонним является треугольник MRP. Заметим, что точка R лежит на диагонали AC квадрата, а точки M и P – середины его сторон, значит, $MR = PR$. Также $MR = MQ = MP$. Следовательно, треугольник MRP – равносторонний, тогда и треугольник MXY – равносторонний.

Помимо симметрии, в задачах на сгибание могут возникать и другие мотивы. Это бывает часто в тех случаях, когда сгибается не прямоугольник, а треугольник. Для решения требуется использовать различные факты школьной геометрии. Хорошей иллюстрацией служат два способа решения следующей задачи.

Задача 4 (*фольклор, Московская математическая регата 2014/15, 8 класс*). Бумажный прямоугольный треугольник ABC перегнули по прямой так, что вершина C прямого угла совместилась с вершиной B и получился четырёхугольник. В каких отношениях точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит эти диагонали?

Решение. Из условия задачи следует, что линия сгиба – серединный перпендикуляр к отрезку BC. Пусть этот перпендикуляр пересекает стороны BC и AB в точках K и M соответственно, тогда после перегибания получен четырёхугольник $CKMA$, диагонали которого пересекаются в точке O (рис. 4). Далее можно рассуждать по-разному.

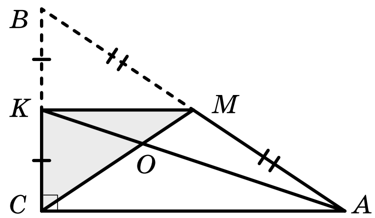


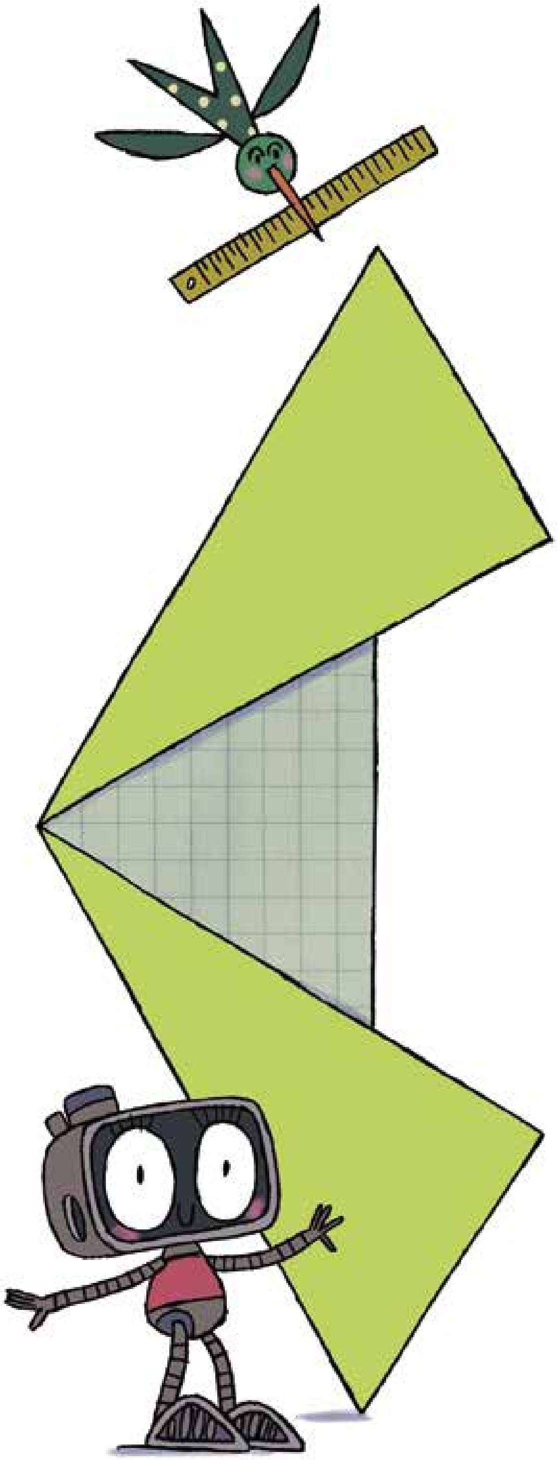
Рис. 4

Первый способ. CM и AK – медианы треугольника ABC, O – точка их пересечения, значит, $CO : OM = AO : OK = 2 : 1$.

Второй способ. Так как KM – средняя линия треугольника ABC, то $KM \parallel AC$ и $KM = \frac{1}{2}AC$. Значит, $CKMA$ – трапеция, поэтому треугольники KOM и COA

подобны. Следовательно, $CO:OM = AO:OK = AC:KM = 2:1$.

Конечно, существуют и более сложные задачи, связанные со сгибанием листов бумаги (а в некоторых случаях, ещё и с наложением одного листа на другой), которые остались за рамками этой статьи, так как они, в основном, рассчитаны на тех, кто уже глубоко и полностью изучил школьный курс геометрии.

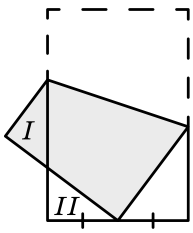


ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

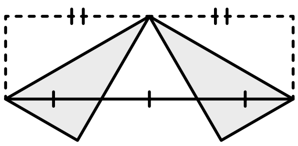
Автором половины предлагаемых задач является А.В.Шаповалов, которого уместно здесь процитировать: «Люблю задачи с перегибанием бумаги: и геометрия несложная, и надо построить несложную математическую модель из житейской ситуации».

Задача 5 (*А.Блинков*). Бумажный прямоугольник согнули по диагонали, а затем, сложив ещё два раза, получили шестислойный треугольник. Найдите угол между стороной и диагональю исходного прямоугольника.

Задача 6 (*А.Хачатурян, XXII математический праздник, 7 класс*). Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (см. рисунок). Оказалось, что треугольники *I* и *II* равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



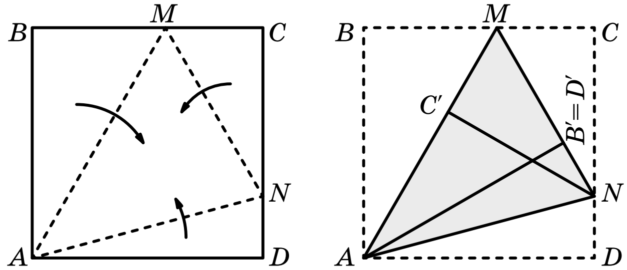
Задача 7 (*А.Шаповалов, XII Московская устная олимпиада, 7 класс*). Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделённой на три равные части. Докажите, что белый треугольник в середине – равносторонний.



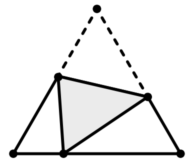
Задача 8 (*А.Шаповалов, XL Уральский турнир юных математиков, 7 класс*). Прямоугольный лист бумаги перегнули по прямой так, что противоположные вершины совместились. В результате получились три треугольника: в середине – один двухслойный, а по краям – два однослойных. Докажите, что двухслойный треугольник – равнобедренный.

Задача 9 (*А.Шаповалов, XIV турнир математических боев имени А.П. Савина, 7 класс*). Бумажный прямоугольник $ABCD$ перегибается так, что точка C попадает в точку C' – середину стороны AD, линия сгиба проходит через вершину B и пересекает сторону CD в точке K. Найдите отношение $DK : AB$.

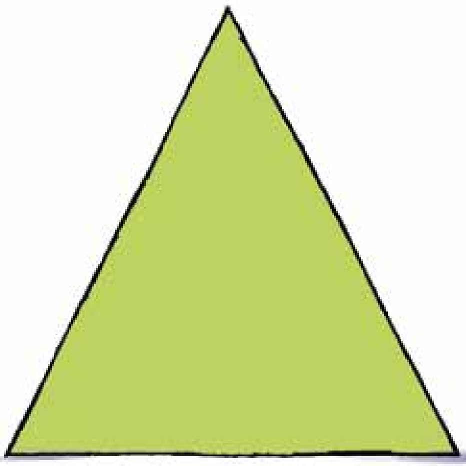
Задача 10 (*А. Хачатурян, XI Московская устная олимпиада, 7 класс*). Из квадратного листа бумаги сложили треугольник MAN (см. рисунки). Найдите угол ANM.



Задача 11 (*А. Кулыгин, XIII Московская устная олимпиада, 7 класс*). Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок). Докажите, что углы двух получившихся белых треугольников соответственно равны.

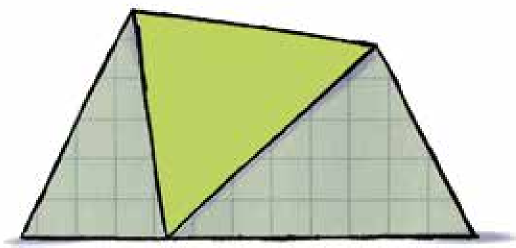


Задача 12 (*А. Шаповалов, XV турнир математических боёв имени А.П. Савина, 8 класс*). Из листа бумаги, одна сторона которого жёлтая, а другая – белая, Саша вырезал равнобедренный треугольник. Затем он перегнул его по биссектрисе угла при основании и склеил. Получился треугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников: белого и жёлтого. Докажите, что после перегибания у него вновь получился равнобедренный треугольник.



Задача 13 (*А. Шаповалов, XII турнир математических боёв имени А.П. Савина, 8 класс, вариация*). Бумажный треугольник со сторонами 4, 5 и 6 перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины 5, попала на эту сторону. В получившемся четырёхугольнике углы, примыкающие к линии сгиба, оказались равными. Найдите длины отрезков, на которые разделила сторону попавшая туда вершина.

Задача 14 (*Т. Голенищева-Кутузова, финал VII олимпиады по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, 8 класс*). Петя вырезал из бумаги прямоугольник, наложил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провёл диагональ, опустил на неё перпендикуляры из двух остальных вершин, после чего разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону так, что вместе с нижним прямоугольником они образовали ещё один прямоугольник. Каким образом по полученному прямоугольнику восстановить исходный, используя только циркуль и линейку?



Художник Наталья Гаврилова