XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

9 и 23 октября 2016 года состоялся осенний тур XXXVIII Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового варианта и избранные задачи сложного варианта для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант, 8–9 классы

1 (4 балла). Взяли 5 натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могут ли все 10 полученных сумм оканчиваться разными цифрами?

Михаил Евдокимов

2 (4 балла). На прямой отмечено 4 точки и ещё одна точка отмечена вне прямой. Всего существует 6 треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

Егор Бакаев

3. На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

а) **(2 балла).** Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечётными.

б) **(2 балла).** Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были чётными?

Павел Кожевников

4 (5 баллов). Даны параллелограмм $ABCD$ и точка K такая, что $AK=BD$. Точка M – середина CK. Докажите, что $\angle BMD=90°$.

Егор Бакаев

5 (5 баллов). Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?

Егор Бакаев

XXXVIII
ТУРНИР ГОРОДОВ
ОСЕННИЙ ТУР

Избранные задачи сложного варианта, 8–9 классы

1 (5 баллов). Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

Николай Чернятьев

2 (5 баллов). В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошкой называется прямоугольник, состоящий из двух клеток.)

Николай Чернятьев

3 (6 баллов). Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности. (Ортоцентр треугольника – точка пересечения его высот.)

Егор Бакаев

4 (8 баллов). Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета – либо чёрная, либо белая. Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке?

Александр Кузнецов

5 (8 баллов). На трёх красных и трёх синих карточках написаны шесть положительных чисел, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то трёх чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же трёх чисел. Всегда ли можно гарантированно определить эти три числа?

Борис Френкин

Художник Сергей Чуб