НАШ КОНКУРС («Квантик» № 1, 2017)

21. *Два поезда едут навстречу друг другу: один со скоростью 20 км/ч, его длина 600 м, а второй со скоростью 40 км/ч, его длина 400 м. Машинисты поездов встретились в полдень. Когда встретились кондукторы, едущие в хвостах этих поездов?*

Ответ: кондукторы встретятся в 12:01.

Расстояние между кондукторами уменьшается со скоростью $20+40=60$ км/ч, то есть на 1 км в минуту. В момент встречи машинистов расстояние между кондукторами равно сумме длин поездов, то есть $600+400$ м $=1$ км. К моменту встречи кондукторов это расстояние уменьшилось до нуля, то есть прошла 1 минута.

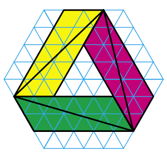
22. а) *Найдутся ли 3 целых числа, которые все различны и куб каждого из них делится на произведение остальных чисел?* б) *А найдутся ли 4 таких числа?*

а) Да, найдутся. Например, 8, 16 и 32.

б) Нет, не найдутся.

Пусть такие числа найдутся. Ясно, что числа ненулевые. Если среди них есть отрицательные, уберём у них знаки. Для новых (положительных) чисел условие по-прежнему будет выполнено, только какие-то числа могут стать равными – но не все! Рассмотрим тогда самое маленькое из них. Его куб будет меньше произведения остальных трёх чисел, а значит, не может делиться на это произведение.

23. *Шестиугольник на рисунке составлен из 96 одинаковых равносторонних треугольников площади 1. Найдите площадь серого треугольника.*



Ответ: 39. Каждый из цветных параллелограммов на рисунке состоит из 20 треугольников, а большой треугольник – из трёх половинок параллелограммов и ещё 9 клеток.

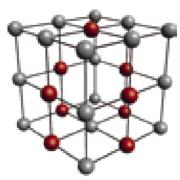
24. *Докажите, что количество всех цифр в последовательности 1, 2, 3, 4, ... , 1000 равно количеству всех нулей в последовательности 1, 2, 3, 4, ... , 10000.*

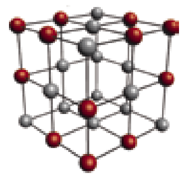
Чтобы доказать, что нулей и цифр поровну, разобьём их на пары «ноль второй последовательности – цифра первой последовательности». Имея во второй последовательности число с нулём, вычеркнем этот ноль и поставим ему в соответствие цифру в получившемся числе на том же месте с конца. Например, первый ноль в числе 2090 соответствует двойке в числе 290, а второй ноль в числе 2090 соответствует девятке в числе 209. Тогда и каждой цифре в числе из первой последовательности будет соответствовать свой ноль в числе из второй последовательности (вставляем ноль справа от цифры).

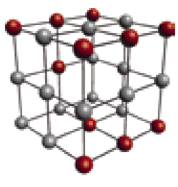
25. а) *Куб 3×3×3 сложен из 27 синих кубиков (26 мы видим, а один находится внутри). Имеются также синяя и белая краски. За ход разрешается выбрать любой видимый кубик и перекрасить его, а также все кубики, имеющие с выбранным общую грань, по правилу: синий – в белый, белый – в синий. Сделайте несколько ходов так, чтобы получился куб, белый снаружи.*

б)* *Рассмотрим все возможные варианты окраски 26 видимых кубиков в синий и белый цвета (каждый кубик красится целиком в один из цветов). Каждый ли из этих вариантов можно получить из синего куба за несколько ходов?*

а) Выберем все кубики, кроме угловых. Тогда все кубики поменяют цвет. Действительно, назовём два кубика соседями, если у них есть общая грань. У угловых кубиков 3 соседа, у кубиков в середине рёбер куба – 4 соседа, у кубиков в центре граней – 4 соседа. Значит, угловые кубики перекрасятся 3 раза, а остальные – 5 раз.





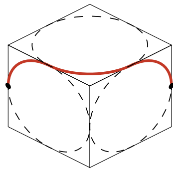


б) **Ответ:** каждый. Достаточно для каждого кубика научиться за несколько ходов менять только его цвет. Будем изображать центры кубиков маленькими шариками и соединять отрезком центры соседних кубиков. Если мы выберем кубики, центры которых отмечены красным на верхнем рисунке, то поменяет цвет лишь центральный кубик верхней грани. Рисунок посередине показывает, какие надо выбрать кубики, чтобы поменять цвет лишь одного углового кубика, а нижний рисунок – чтобы поменять цвет лишь одного кубика в середине ребра.

КУБ ИЛИ ШАР? («Квантик» № 2, 2017)

Ответ: не всегда.

Рассмотрим куб и сферу, касающуюся всех рёбер куба (вписанную в каркас куба). Эта сфера пересекается с кубом по шести окружностям, вписанным в грани куба. Двигая кончик волшебной палочки по этим окружностям (переходя с окружности на окружность в точке их касания), можно нарисовать линию, соединяющую две противоположные точки куба – на рисунке приведён пример.



Если у Гарри будут камни в форме шара и куба именно таких размеров и он нарисует именно такую линию, невозможно будет определить, на каком из камней она нарисована.

Поправка. Автор задачи – Егор Бакаев. К сожалению, в предыдущем номере был ошибочно указан автор другой задачи, которая имеет родственные связи с этой. Приносим свои извинения.

КРАСНАЯ НИТЬ

Плёнка плотно прилегает к трубе. Если потянуть нить, то она изнутри будет разрывать плёнку. Без нити удалить эту плёночную упаковку с трубы было бы затруднительно.

Интересно, что нить в канатах, возможно, и не была красной. Вильям Фальконер, поэт и моряк, без вести пропавший в море в 1769 году, успел опубликовать Универсальный морской словарь. В нём он пишет, что «нить от воров», которую вплетали в каждую верёвку канатов флота британского короля, отличалась от остальных тем, что её не смолили и закручивали плетение в обратную сторону. По любому обрезку каната можно было определить, был ли он украден у королевской службы.

ЗЕМЛЯ И ЛУНА: ПРИЛИВЫ

Задача 1. Да, одинакова. Лунные сутки – что на видимой стороне, что на обратной – равны «синодическому периоду», то есть промежутку времени между двумя одинаковыми фазами Луны на Земле, например, новолуниями (см. рис.1, *б*). Если бы Земля стояла на месте, а Луна синхронно (всё время глядя на Землю одной стороной) крутилась вокруг неё, сутки на Луне длились бы те же 27 наших дней. Но Земля и сама движется по орбите, от этого через 27 дней новолуние ещё не повторится: Земля за это время прошла примерно $\frac{27}{365} \approx \frac{1}{13}$ круга, и Луне нужно ещё примерно $\frac{27}{13} \approx 2$ дня, чтобы это угол «докрутить». Итого – 29 дней. Это подсчёт приблизительный; чтобы получить точный ответ, нужно, глядя на рисунок 1, вывести условие: $\frac{T}{S} = \frac{360^\circ+\alpha}{360^\circ} = 1 + \frac{T}{1\ \textit{год}}$, где $S \approx 27$ дней – (звёздный) период обращения Луны, T – нужный нам синодический период. Из этого уравнения можно точно найти T, *если точно знать* S (27 дней – небольшая точность).

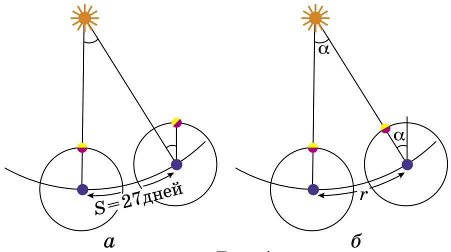


Рис.1

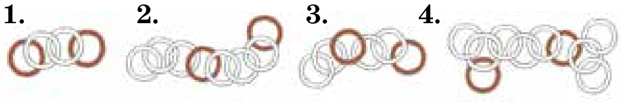
Задача 2. Полнолуние – значит, направления на Луну и Солнце противоположны. Максимальная высота воды будет тогда, когда Луна выше всего над горизонтом – в полночь, и когда она ниже всего – в полдень. Этот ответ дан по солнечному времени, декретное (принятое правительством острова) время может от него отличаться. Если сейчас лето, то выше дневной прилив, если зима – то ночной. (Это легко увидеть, дорисовав Солнце на рисунке 3 статьи.)

Задача 3. На полюсах – там в течение суток постоянна высота Луны и Солнца над горизонтом. Положение полюса относительно вершины горба не меняется. Правда, там будут незаметные без специальных приборов месячные приливы – из-за движения Луны вокруг Земли.

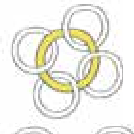
Задача 4. 21 марта. В новолуние направление на Луну и Солнце практически совпадают, и в равноденствие на экваторе они оба проходят через зенит (и точку, противоположную зениту – она называется *надир*). В декабре максимальная высота Солнца над горизонтом (и глубина под горизонтом) равна $90-23=67°$. На экваторе приливы в течение одного дня не отличаются по высоте.

УЗЛЫ, ЦЕПОЧКИ И МАТЕМАТИКА

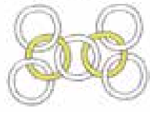
1. 2. 3. 4.



5. Достаточно разомкнуть жёлтое кольцо. Если ничего не размыкать, кольца не распадутся, ведь жёлтое кольцо сцеплено с каждым из остальных.

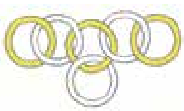


6. Достаточно разомкнуть 2 жёлтых кольца. Если разомкнуть одно любое кольцо, то останется хотя бы одна пара сцепленных колец.



7. Любые 2 кольца сцеплены, значит, нужно разомкнуть 2 любых кольца, и этого достаточно.

8. Достаточно разомкнуть 3 жёлтых кольца. Цепочку можно разбить на 3 пары сцепленных колец, по одному жёлтому кольцу в каждой паре. Значит, нужно разомкнуть минимум 3 кольца, чтобы кольца распались.



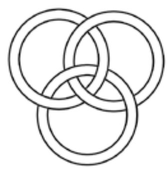
9. Достаточно разомкнуть жёлтое кольцо. Если ничего не размыкать, останется жёлтое кольцо, сцепленное с одним из остальных.

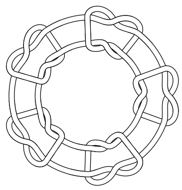
10. Достаточно разомкнуть 4 жёлтых кольца. Если разомкнуть лишь 3 каких-то кольца, то в цепочке из 7 колец найдутся 2 соседних неразомкнутых кольца, сцепленных друг с другом, потому что в нашей цепочке любые два соседних кольца сцеплены.

Ответы на вопросы в тексте.

Чтобы распалась цепочка из 57 колечек, нужно разомкнуть 28 колечек – те, что стоят на чётных местах. Меньшего числа не хватит, потому что иначе найдутся 2 сцепленных кольца, которые мы не разомкнули. Случай 2017 колец разбирается аналогично.

Вот пример трёх и пяти колец, которые нельзя расцепить, но если одно любое кольцо разомкнуть, то остальные распадаются. Правда, 5 колец получились сильно изогнутыми. Примера с обычными кольцами мы не знаем.





Заметим, что в тех случаях, когда колечки распадаются, в этом легко убедиться. Но доказать, что группа колец не распадается, очень сложно, и мы не приводим ни одного доказательства.

ЗАПОТЕВШИЕ ОЧКИ

Стекло надо обдувать горячим воздухом: во-первых, он нагреет стекло, и с него испарится влага. Во-вторых, поскольку воздух тёплый, в нём может находиться больше водяного пара, чем в холодном, и вода на стекле испарится быстрее.

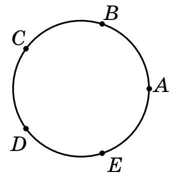
С кондиционером всё ещё быстрее, потому что он сушит воздух – ведь в кондиционере воздух охлаждается и из него конденсируется влага.

LXXXIII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. Ответ: 25 минут.

Обозначим деревни A, B, C, D, E. По условию, из деревни A в другие деревни Вася едет по маршрутам $A–B$, $A–B–C$, $A–E$, $A–E–D$. Предположим, что Вася проезжает маршрут $A–B–C$ на велосипеде. Тогда путь на велосипеде из A в B занимает меньше 20 минут, и путь из B в C тоже. Значит, Вася в поездках $A–B$ и $B–C$ пользуется мопедом, и маршрут $A–B–C$ занял бы 20 минут как на велосипеде, так на мопеде. Но этого не может быть, так как мопед движется быстрее велосипеда.



Значит, предположение, которое мы сделали, неверно, и маршрут $A–B–C$ Вася проезжает на мопеде. Аналогично Вася проезжает на мопеде маршруты $C–D–E$, $E–A–B$, $B–C–D$, $D–E–A$. Проехав по всем этим маршрутам, Вася объедет шоссе два раза, потратив на это 50 минут. Следовательно, один круг занимает 25 минут.

2. Рассмотрим самый большой дом – тот, в котором живёт 45 человек. Предположим, что тёзки этих людей живут в других домах. Это значит, во-первых, что все обитатели большого дома имеют разные имена, а во-вторых, что никто не может быть тёзкой сразу двух человек из большого дома. Поэтому суммарное количество тёзок у жителей большого дома не менее 90 и все эти тёзки живут в остальных четырёх домах. Но это невозможно, поскольку в остальных домах в сумме живёт лишь 80 человек. Значит, наше предположение неверно и некоторые жители большого дома – тёзки.

3. Ответ: 11 столбцов.

Очевидно, что обе строки данного фрагмента 2×2 можно однозначно продолжить влево. Получится более широкий фрагмент таблицы:

22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Теперь ясно, что числа от 1 до 11 выписаны в предыдущей строке, и всего в таблице 11 столбцов.

4. Ответ: 2 000 000 рублей.

При распиливании горного хрусталя получаются две равные части, каждая в 2 раза дешевле исходного камня. Значит, суммарная цена этих половинок такая же, как и у целого камня. А при распиливании алмаза получаются две равные части, каждая из которых в 4 раза дешевле, чем исходный алмаз. Таким образом, распил алмаза приводит к потере половины его стоимости. При дележе наследства братья потеряли 1 000 000 рублей, эти потери равны половине исходной стоимости алмазов. Следовательно, алмазы стоили 2 000 000 рублей.

5. Мысленно выпишем числа друг под другом и попытаемся найти их сумму S с помощью сложения «в столбик». В разряде единиц по одному разу выписаны цифры 0, 1, 2, ..., 9. Их сумма равна 45. Поэтому последняя цифра числа S равна 5, и при продолжении вычислений в следующий разряд переносится 4 единицы. В разряде десятков также по одному разу выписаны цифры 0, 1, ..., 9 с суммой 45. С учётом переноса получается сумма 49, то есть предпоследняя цифра числа S равна 9. Таким образом, число S оканчивается на 95. Значит, оно делится на 5, но не делится на 25, и поэтому не может быть точным квадратом.

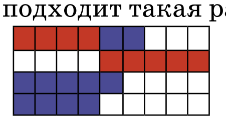
6. Ответ: 8 участников.

Оценка. Результат участника увеличился на $6k$, где k – количество его оценок 0, 1, 2. Пронумеруем участников по убыванию результатов. Очевидно, второй после исправления «перепрыгнул» через первого, и, значит, его результат после исправления увеличился не меньше чем на 6. Третий участник «перепрыгнул» через первого и второго, и тогда его результат увеличился сильнее, чем результат второго, то есть не меньше чем на 12. Аналогично результат четвёртого увеличился не менее чем на 18, и т.д. Поскольку в олимпиаде было 7 задач, никакой результат не мог увеличиться больше чем на 42. Значит, могло быть не более 8 участников.

3	3	3	3	3	3	3
0	3	3	3	3	3	3
0	0	3	3	3	3	3
0	0	0	3	3	3	3
0	0	0	0	3	3	3
0	0	0	0	0	3	3
0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0

Пример. Описанная ситуация возможна, если, например, участники имели такиерезультаты (в строках выписаны результаты участников).

7. Например, подходит такая расстановка.



Если щёлкнуть по строкам, получится две красные строки, одна белая и одна синяя. Далее, щёлкая по столбцам, получаем красную таблицу.

Если же сначала щёлкать по столбцам, получится 5 синих столбцов и 4 белых. И теперь, если щёлкать по строкам, таблица станет синей.

Замечание. Построенная таблица приводит к следующему «парадоксу голосования».

Пусть имеется четырёхэтажный дом, в нём 9 подъездов и в каждом подъезде на каждом этаже всего одна квартира. Для удобства считаем, что в каждой квартире живет 1 человек, всего, стало быть, 36 жильцов. Схематически дом изображён в виде нашей таблицы 4×9. Жильцы решают, в какой цвет им покрасить свой дом. Большинство – 16 человек (чуть меньше половины) – хотят, чтобы дом был белым, 11 человек (менее трети) голосуют за синий цвет, а 9 (четверть) – за красный.

Пусть предпочтения жильцов распределены так, как указано в нашей таблице. Получается, что при простом голосовании (когда принимают тот вариант, который набрал большинство голосов) дом будет покрашен в белый цвет.

Если сначала проголосовать по подъездам – для каждого подъезда выяснить, чего хочет большинство его жителей, а потом среди этих мнений выбрать самое популярное, – дом покрасят в синий цвет, поскольку 5 подъездов из 9 «предпочитают» синий цвет.

Если же сначала проголосовать по этажам – для каждого этажа выяснить, чего хочет большинство его жителей, а потом среди этих мнений выбрать самое популярное, – дом покрасят в красный цвет, так как два этажа из четырёх «хотят» красный цвет, а белый и синий цвет набрали лишь по одному этажу «сторонников».

Возможно, вам кажется неестественным такой способ голосований. Между тем он широко применяется. Голосующие очень часто разбиты на группы: классы, отделы, республики и т.п., и тогда голосование удобно строить, проведя сначала голосование внутри этих групп, а потом подвести итог этих голосований на педсовете, совете директоров, в парламенте, выбрав самое популярное из полученных мнений.

Например, директор школы решил на каникулах провести для всех школьников 1–4 классов совместное мероприятие, а именно: лыжные соревнования (белое), поездку в аквапарк (синее) или переписывание контрольной работы (красное). Кстати, школа маленькая – в каждом классе всего лишь... 9 человек, и, скажем вам по секрету, четверть учеников – двоечники. Что же выбрать? Спросим у школьников! Пусть в каждом классе решат, чего хотят ученики, а потом среди мнений этих четырёх классов выберем самое популярное! Узнаёте?