ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Игорь Акулич

Сто пятьдесят стрелок

– Поздравь меня, Даня, я нашёл ещё одну задачу[1]. Как ты думаешь, про что?

– Боюсь ошибиться, но ещё больше боюсь угадать. Неужели про стрелки часов?

– Именно! Вот послушай:

Сумасшедший конструктор создал часы со 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, и т.д., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две стрелки или более, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?

– Какая-то мрачная тенденция. Был у нас, помнится, чудак-часовщик[2], теперь – сумасшедший часовщик… Что же дальше будет? Маньяк-часовщик?

– Ты не увиливай. Не можешь решить – так и скажи!

– Почему же не могу? Могу, наверное. Только не сразу. Как представлю себе полторы сотни стрелок, и все друг на друга налетают и улетают, вернее сказать, отлетают… Жуть! Хотя… А ведь всё не так сложно, как кажется! Ведь раньше всего самая быстрая стрелка (150-я) догонит самую медленную (1-ю) – и обе отвалятся. Потом 149-я догонит 2-ю – и тоже отпадут. Ну, и так далее. А 74-ю стрелку догонит… какая же? Или, наоборот, она кого-то догонит? Подумать надо…

– А ты заметь, что сумма номеров двух сталкивающихся стрелок всегда постоянна и равна 151.

– Да, верно. Тогда с 74-й стрелкой встретится… 151 минус 74 … 77-я! И когда же это случится? Если все скорости измерять в оборотах в час, то скорости стрелок равны их номерам, поэтому за время t (часов) они пройдут соответственно $74t$ и $77t$ оборотов. Но при этом более быстрая стрелка догонит медленную по кругу, то есть пройдёт на 1 оборот больше. Поэтому получаем:

$$77t - 74t = 1,$$

[1] «Квант» № 1, 2014 г., с. 35, автор задачи – К. Кохась.

[2] «Квантик» № 6, 2015 г., с. 2.

откуда $t = \frac{1}{3}$. Значит, 74-я стрелка отвалится через $\frac{1}{3}$ часа, или 20 минут.

– Верно. А через какое время наступит момент, когда отвалится последняя стрелка?

– Ну, это понятно – когда 76-я стрелка догонит 75-ю. Здесь получаем $76t - 75t = 1$, и $t = 1$. Через час!

– И как тебе задачка?

– Интересная, конечно, но очень уж проста.

– Неудивительно – она и была предложена младшим школьникам. Но специально для тебя я её усложнил. Вот послушай. Сюжет тот же, но часовщик закрепил стрелки чуть посильней, так что теперь каждая из них после первого совпадения с другой стрелкой не отваливается, а отпадает только после второго совпадения.

– С той же самой стрелкой?

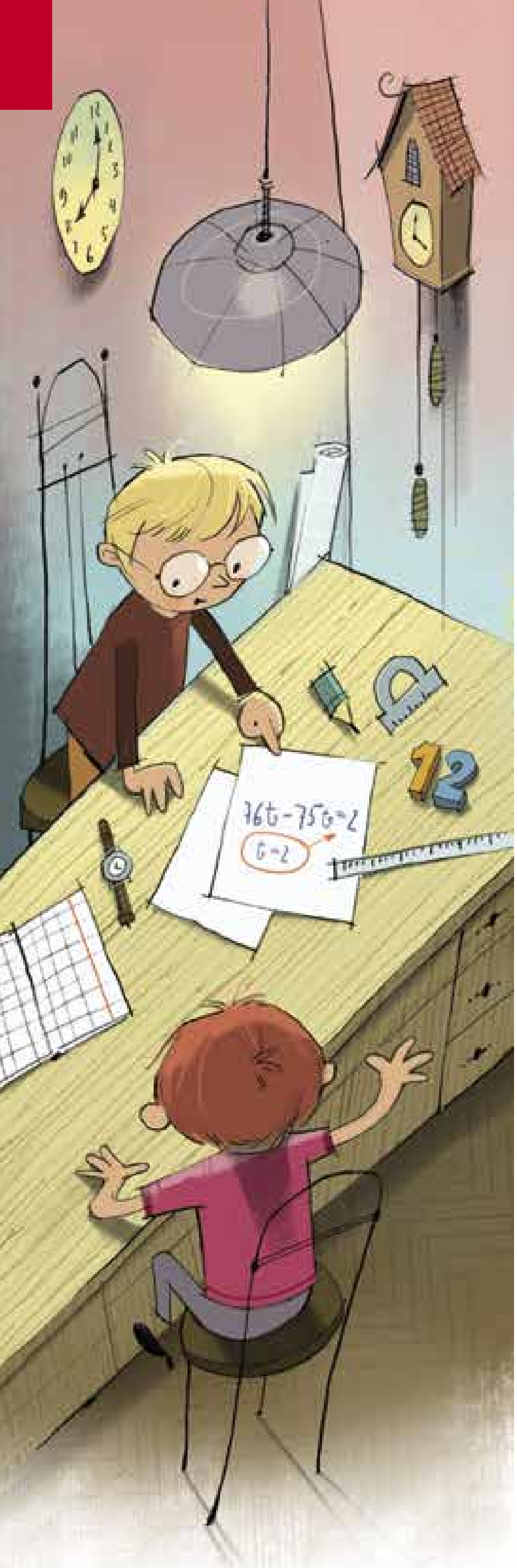
– Неважно, с какой. То есть первое столкновение стрелка выдерживает, а второе – уже нет. Сможешь ли ты «с ходу» ответить на те же два вопроса: когда отпадёт 74-я стрелка и когда часы останутся вообще без стрелок? А потом проверим.

– А что тут думать? Раз допустимое число столкновений возрастает вдвое, то и время, естественно, возрастает вдвое. Значит, ответы таковы: 40 минут и 2 часа.

– Хорошо, давай проверим. Только знаешь что, будем для удобства называть стрелку, которая ни с какой другой ещё не совпала, *сильной*, а которая уже разок с кем-то повстречалась, *слабой*. Тогда сильная стрелка, столкнувшись с любой другой, становится слабой, а слабая – погибает (в смысле, отлетает). Что мы тогда имеем? Сначала сталкиваются 150-я и 1-я стрелки, и обе становятся слабыми. Потом 150-я стрелка натыкается на 2-ю и отлетает, а 2-я становится слабой. Но одновременно с этим 149-я стрелка совпадает с 1-й...

– Почему это одновременно?

– Да ты же сам писал уравнения! Из них же сразу следует, что время совпадения стрелок обратно пропорционально разности номеров стрелок! И если разность номеров стрелок одна и та же, то и совпадут они одновременно!



– Согласен.

– Ну, и когда 149-я стрелка совпадает с 1-й, то 1-я (слабая) отпадёт, а 149-я станет слабой. А после этого совпадут две слабые стрелки – 2-я и 149-я, и их тоже не станет. Вот четыре стрелки и отвалились – две самые медленные и две самые быстрые.

– Погоди-ка, но тогда дальнейшее ясно! После этого отпадут ещё четыре стрелки – 3-я, 4-я, 147-я и 148-я, потом ещё четыре... Квартетами отпадают!

– Вот-вот. Но 150 не делится на 4. Поэтому самый «хвост» придётся проанализировать «вручную».

– Так это без проблем! Итак, в какой-то момент останется шесть стрелок. Номера их... э-э-э... от 73 до 78 включительно. Среди них и 74-я стрелка – та, что надо. Тогда 74-я стрелка сперва совпадёт с 78-й и «ослабнет», а потом – с 77-й, и... что же это получается? То же самое уравнение: $77t-74t=1$, и потому время получается такое же, как раньше – 20 минут! Не может быть!

– Как видишь, может. Но ты ещё не определил, когда стрелок вообще не станет.

– Нет проблем! После «отвала» последней четвёрки (73-й, 74-й, 77-й и 78-й) останутся лишь две: 75-я и 76-я. При первом соударении они станут слабыми, и отлетят только при втором. Поэтому разность пройденных ими расстояний составит не один, а два круга. Следовательно, $76t-75t=2$, и, значит, $t=2$. Через два часа! Ну что ж, хотя бы на 50 процентов вопросов я дал верный ответ.

– А если ещё чуть-чуть усложнить? Скажем, если каждая стрелка отпадает только после третьего совпадения?

– Думаю, ничего особенного. Та же песня. Для 74-й стрелки время останется прежним – 20 минут, а с последней... получается как для первого варианта – 1 час.

– Это почему?

– А потому, что здесь стрелки надо разбивать на группы по 6 штук. И поскольку 150 делится на 6, то последняя шестёрка – это стрелки с 73-й по 78-ю.

И потому 75-я стрелка сначала столкнётся с 78-й, потом с 77-й, а потом уже с 76-й – и отлетит. Здесь обгонять её на два круга не понадобится.

– Но, так или иначе, получается естественное обобщение. Ну, 74-ю стрелку отбросим, как частный случай, и зададимся вопросом: **когда часы останутся вообще без стрелок, если каждая стрелка отпадает после n-го совпадения с другими стрелками (где n – произвольное натуральное число)?**

– Ой, тут, боюсь, ждут нас неприятности. Пока n не слишком велико, конечно, можно что-то накопать... Например, если $n = 4$, то стрелки разбиваются на группы по 8 штук. Так как $150 = 8 \cdot 18 + 6$, после исчезновения последней восьмёрки останется 6 стрелок – с 73-й по 78-ю. 75-я стрелка последовательно столкнётся с 78-й, 77-й и 76-й стрелками, но пока останется «жива». Причём последнее из этих столкновений (с 76-й стрелкой) произойдёт через 1 час. А дальше с какой стрелкой она столкнётся? Их пять штук, и они «разбрелись» по циферблату кто куда. Проблема...

– Никакой проблемы! Ты подумай – как раз через час они опять соберутся все вместе и будут смотреть вверх, но перед этим каждая «испытала» три соударения (притом последнее столкновение – «коллективное»: все шесть разом). Стало быть, очередное соударение после этого будет фатальным для каждой стрелки. И потому мы как бы получили исходную задачу, только стрелок здесь меньше – только шесть. Значит, ещё час – и их не станет. Сначала отпадут 73-я и 78-я, потом – 74-я и 77-я, и наконец – 75-я и 76-я. Так что стрелки полностью исчезнут через 2 часа.

– Стоп! Здесь ещё одна тонкость выплывает! Это самое «коллективное шестистрелочное» соударение – как его интерпретировать? Здесь ведь каждая стрелка совпадает одновременно с *пятью другими*. Можно ли считать это *одним* столкновением? Я думаю – нет, это всё-таки *пять* столкновений *каждой стрелки с каждой из остальных* – и никак иначе! Например, если тебя одновременно бьют пятеро – то и синяков будет в пять раз больше, чем в случае одного.

– Нашёл, что вспоминать! Когда это было-то? Хотя, в целом, убедительно.

– Но меня больше берут сомнения насчёт самой возможности повторного совпадения всех шести стрелок. Заметь – 73-я и 78-я стрелки совпадают через каждые $\frac{1}{5}$ часа (поскольку $78 - 73 = 5$). Поэтому когда пройдёт $\frac{4}{5}$ часа, они уже совпадут 4 раза и исчезнут. А скорее даже раньше, потому что наверняка произойдут их совпадения и с другими стрелками. Поэтому через час шесть стрелок вместе уж точно не соберутся.

– Как же быть?

– Придётся, наверно, составлять таблицу. Вот такую, ступенчатую. Строки пронумерованы от 73 до 77, столбцы – от 74 до 78, и в каждой ячейке – моменты времени в течение первого часа, когда совпадут стрелки с номерами, соответствующими строке и столбцу:

	74	75	76	77	78
73	1	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$
74	×	1	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$
75	×	×	1	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$
76	×	×	×	1	$\frac{1}{2}, 1$
77	×	×	×	×	1

А теперь присвоим каждой стрелке по нулю баллов и будем «накапливать» баллы после каждого соударения. Как наберётся 4 балла – стрелку долой. И поглядим, что получится. Сначала для удобства все моменты времени расставим в порядке возрастания: $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1$. Итак, в момент, равный $\frac{1}{5}$ часа, совпадут 73-я и 78-я стрелки, и у них по одному баллу. А в момент $\frac{1}{4}$ часа совпадут 73-я и 77-я, а также 74-я и 78-я. Далее, в момент $\frac{1}{3}$ часа имеет место совпадение 73-й и 76-й, а также 74-й и 77-й, ну, и 75-й и 78-й стрелок. В момент $\frac{2}{5}$ опять совпали 73-я и 78-я стрелки, причём у них набралось по 4 балла, и потому они сразу и отвалились. В момент $\frac{1}{2}$ часа совпали 74-я и 76-я, а также 75-я и 77-я. В момент $\frac{3}{5}$ часа совпадений нет (всё, что могло совпасть, уже отлетело). Зато в момент $\frac{2}{3}$ часа совпадут 74-я и 77-я стрелки – и тоже отвалятся, потому что накопили по 4 балла. Что осталось? Только 75-я и 76-я стрелки. Они уже набрали по два балла и совпадают через каждый целый час (после начала отсчёта). Значит, по 4 балла они наберут за 2 часа. Итак, все стрелки исчезнут через 2 часа. Так что ты был прав. Но только в данном частном случае.

– Хорошо, а если $n = 5$?

– Это полный аналог с $n = 3$ и вообще с любым n, при котором 150 делится на $2n$. Рассуждения аналогичны, и ответ такой же: через час.

– Тогда пусть $n = 6$...

– Нет, хватит! У меня уже от $n = 4$ голова кругом пошла. По часовой стрелке. Так что в другой раз!

Вот каким образом, дорогие читатели, несложная задачка для младших школьников при попытке обобщения превратилась в довольно заковыристую проблему, за которую никто пока не брался. Сверх того, можно обобщать и дальше, считая, что исходное количество стрелок равно не 150, а некоторому натуральному k. А вопрос остаётся прежний: в какой момент времени часы окажутся без стрелок?

Кое-какие выводы, конечно, можно сделать из разговора двух наших собеседников. Например, если k делится на $2n$, то часы лишатся стрелок через час.

При $n = 1$ и нечётном k легко видеть, что последовательно отпадут все стрелки, кроме одной – самой средней по скорости. Поэтому ответ здесь категоричен: никогда.

Для остальных k и n ответ в общем случае неизвестен. Кто сумеет одолеть проблему – просим не забыть поделиться с редакцией. Ждём!

Художник Алексей Вайнер