КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, I ТУР
(«Квантик» № 1, 2017)

1. *Для всех натуральных $n \leqslant 9$, для которых это возможно, найдите слово (имя существительное, нарицательное, в словарной форме) из n букв, в котором не менее половины букв – буквы О.*

Для чётных n вариантов ответа много, нет даже необходимости приводить полные списки:

$n=2$: ***до*** (нота), ***ом***, ***ор***...

$n=4$: ***лото***, ***обои***, ***овод***, ***окно***...

$n=6$: ***зоолог***, ***молоко***, ***огород***...

$n=8$: ***околоток***, ***окорочок***...

Даже для $n=10$, не фигурировавшего в задаче, постоянная участница нашего конкурса Таисия Смирнова нашла термин *водооборот*.

С нечётными n дело обстоит куда интереснее. Для $n=1$ решения нет... или есть, если рассматривать само название буквы ***о*** как существительное среднего рода (*В слове «город» второе «о» – безударное*). Для $n=3$ и $n=5$ решение, судя по всему, единственно: ***око***, ***олово***. Для $n=7$ в современном русском литературном языке примеров, по-видимому, нет; но ведь область поиска можно и несколько расширить. Хорошо всем знакомое слово *облако* – заимствование из церковнославянского языка. Церковнославянскому сочетанию *-ла-* в исконно-русских словах часто соответствует *-оло-* (*глас – голос*, *влачить – волочить*); значит, должно было существовать слово *оболоко*. Действительно, это слово засвидетельствовано в древнерусских текстах, а возможно, и сейчас ещё сохранилось в каких-нибудь диалектах. А второклассник Костя Орлов прислал нам редкое слово *оморочо* – так в некоторых сибирских говорах называют самца рыси. Что касается $n=9$, для него подходящих примеров пока не обнаружено.

2. *Какая часть тела человека получила своё название в честь одежды?*

Эта часть тела – ***поясница*** (буквально «место, на котором носят пояс»). В принципе подходит и просто ответ ***пояс*** (в контекстах типа *руки на пояс* или *поклониться в пояс*), но всё-таки он смотрится чуть менее убедительно: *пояс* «одежда» и *пояс* «часть тела» – это два значения одного и того же слова, говорить, что одно из них «получило название в честь другого», несколько странно.

3. *Герои одной детской повести считают, что одна из станций «зелёной» (Замоскворецкой) линии московского метро названа в честь их учительницы. Назовите имя и отчество учительницы.*

Глядя на перечень станций Замоскворецкой линии, можно обратить внимание, что начало названия станции «Динамо» совпадает с женским именем Дина. В таком случае часть *-мо* должна совпадать с началом отчества учительницы. Мужских имён на *Мо-* несколько (*Модест*, *Мориц*, *Мокий*...), но все они сейчас употребляются не очень часто; пожалуй, чаще других можно встретить имя *Моисей*. Действительно, героиню повести Нины Дашевской «Я не тормоз» зовут **Дина Моисеевна**.

4. *Один редактор читал рукопись научно-популярной книги. В самом конце страницы ему попалась фраза, начинавшаяся так: «Когда в 1848 году тогда...» Редактор подумал, что здесь наверняка потребуется что-то исправлять, но, перевернув страницу, убедился, что фраза звучит вполне естественно и не содержит ни грамматических, ни пунктуационных ошибок.*

Попробуйте ответить как можно точнее: как выглядело продолжение этой фразы (достаточно привести первые 4 – 5 слов)?

Отсутствие запятой перед *тогда* указывает на то, что это слово входит в состав придаточного предложения, начинающегося с *когда*. Целиком фраза может выглядеть, допустим, примерно так: ***Когда в 1848 году тогда ещё никому не известный NN поступил в университет, он не знал, какое блестящее будущее его ожидает.***

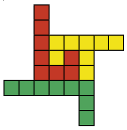
Добавим, что в основу задачи легла реальная история; во фразе, вызвавшей удивление редактора, шла речь о великом французском химике и микробиологе Луи Пастере (1822 – 1895), который в 1848 году был ещё действительно мало кому известен.

5. *Во время обеда маленький сын, показывая на свою тарелку, говорит маме: «Мама, поешь котлету». Мама берёт котлету и начинает её есть. Сын возмущается: «Да не поешь, а поешь!» (Реплики сына условно записаны в обычной русской орфографии.) Какую букву не выговаривает сын? Кратко поясните свой ответ.*

Разумеется, сын хотел попросить маму не съесть, а порезать вкусную котлету. Но поскольку сын **не выговаривает букву *р***, точнее, заменяет звуки [р] и [р'] звуком [й], слова *порежь* [пар'эш] и *поешь* [пайэш] в его исполнении звучат одинаково – как [пайэш].

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 2, 2017)

26. *Разрежьте фигурку на рисунке на три части, равные по площади и периметру.*



Ответ: см. рисунок.

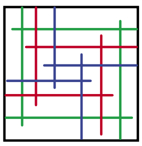
27. *По кругу сидело 10 болтунов. Сначала один из них рассказал один анекдот, следующий по часовой стрелке – два анекдота, следующий – три, и так далее по кругу, пока один не рассказал 100 анекдотов за раз. Тут болтуны устали, и следующий по часовой стрелке рассказал 99 анекдотов, следующий – 98, и так далее по кругу, пока один не рассказал всего один анекдот, и все разошлись. Сколько всего анекдотов рассказал каждый из этих 10 болтунов?*

Ответ: 1000 анекдотов.

Возьмём любого болтуна, кроме последнего, и следующего за ним. Сначала второй на каждом круге рассказывает на анекдот больше, чем первый – и так 10 кругов. А после того как болтуны устали, второй рассказывает на анекдот меньше – тоже 10 кругов. Значит, все рассказали поровну анекдотов – десятую часть общего количества. Всего анекдотов было рассказано $1 + 2 + \ldots + 99 + 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 = (1 + 99) + (2+98)+\ldots+(99+1)+100 = 100\cdot 100=10\,000$.

28. *На каждой стороне квадрата отметили по три точки, отличные от его вершин. От каждой точки внутрь квадрата отложили по отрезку, перпендикулярному соответствующей стороне квадрата. Могло ли случиться, что каждый отрезок пересёк (под прямым углом) ровно а) 4 других отрезка; б) 5 других отрезков?*

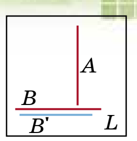
Ответы: а) могло; б) не могло.



а) Пример приведён на рисунке.

б) Пусть каждый отрезок пересекает под прямым углом 5 других. Для каждой стороны выделим ближайший к ней параллельный отрезок, если он один, и назовём его *крайним*. Отрезки, не являющиеся крайними, назовём *средними*. Всего крайних отрезков не более 4. Покажем сначала, что любые два средних перпендикулярных отрезка пересекаются.

Иначе, пусть есть два непересекающихся средних отрезка: A – вертикальный, B – горизонтальный. Тогда один из них, пусть A, лежит целиком по одну сторону от прямой, содержащей другой отрезок (B). Пусть L – горизонтальная сторона квадрата, лежащая по другую сторону от B, нежели A. Так как B средний, найдётся горизонтальный отрезок B', лежащий от L не дальше, чем B. Тогда A не пересекает B', следовательно, пересекает всего не более 4 отрезков. Противоречие.



Сопоставим теперь каждому горизонтальному отрезку единственный не пересекающий его вертикальный отрезок, и наоборот. Тогда все отрезки разобьются на пары. Заметим, что среднему отрезку в пару будет поставлен крайний отрезок (средний бы с ним пересекался). Значит, вертикальных крайних отрезков не меньше, чем горизонтальных средних. Но вертикальных крайних не более двух, а горизонтальных средних не менее 4 – противоречие!

29. *Все 36 карт колоды выложены рубашкой вверх в виде «квадрата» 6×6. За один вопрос игрок может выбрать 9 карт, образующих «квадрат» 3×3, и узнать набор карт, который им соответствует (без указания места, где какая карта лежит).*

а) Докажите, что за несколько вопросов игрок может определить любую карту, на которую укажет ведущий.

б) Какое наименьшее число вопросов достаточно, чтобы узнать угловую карту?

а) Очевидно, что если мы умеем определять карты, которые лежат в верхней левой четверти квадрата 6×6, то сможем определить и остальные карты. Зададим три вопроса: про квадрат 3×3, для которого карта ведущего лежит в левом верхнем углу этого квадрата, а также про квадраты 3×3, которые получаются из первого квадрата сдвигом на 1 вниз и на 1 вправо. Карта ведущего – единственная, которая лежит в первом квадрате, но не лежит ни во втором, ни в третьем, и мы её легко определим.

б) **Ответ:** 3 вопроса.

Докажем, что двух вопросов недостаточно. Пусть мы задали два вопроса (указали два квадрата). Тогда все 36 карт разделятся на 4 части: карты, которые входят в оба квадрата (1-я часть), только в первый квадрат (2-я), только во второй квадрат (3-я) и которые не входят ни в один квадрат (4-я). Если переставить между собой карты внутри любой части, то ответы на вопросы не изменятся. Значит, если карта ведущего попала в часть, в которой больше одной карты, то узнать карту ведущего мы не сможем.

Покажем, что часть, в которой находится угловая карта, содержит хотя бы 2 карты. Если угловая карта входит в оба квадрата

3×3, то они совпадают, и в этой части 9 карт. Если карта входит только в один из квадратов, то в этой части обязательно будет и одна из соседок угловой карты (либо в строке, либо в столбце). Если же карта не входит ни в один квадрат, то в этой части будет не менее $36-9-9=18$ карт.

30. *На стороне BC квадрата ABCD взяли точку M так, что BM в три раза длиннее MC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается одной из сторон квадрата ABCD.*

Ответ: окружность касается стороны CD.

Пусть N – такая точка на стороне AD, что AN в три раза длиннее ND. Тогда $ABMN$ – прямоугольник. Его описанная окружность будет описанной окружностью и для треугольника ABM, а центр O этой окружности – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

Пусть сторона квадрата равна 4, тогда $AB=4$, $BM=3$, откуда, по теореме Пифагора, $AM=5$, а радиус окружности равен 2,5. Расстояние от точки O до стороны AB равно половине стороны BM прямоугольника, то есть равно 1,5. Тогда расстояние от O до стороны CD равно $4-1{,}5=2{,}5$, то есть как раз равно радиусу окружности. Значит, окружность касается стороны CD (в её середине).

ДВА КАНАТА («Квантик» № 3, 2017)

Мы будем считать, что кольцо, прикреплённое к канату внизу, не пролезает в дугу, за которую зацеплен карабин в верхней части каната. Если пролезает, то решение упрощается. Как именно – разберитесь самостоятельно.

Сначала мастер лезет по левому канату на самый верх. Потом отцепляет карабин правого каната и пропускает всю длину каната через дугу его крепления, пока кольцо не упрётся в дугу. Затем перелезает на правый канат, отцепляет левый канат и прицепляет его карабином к кольцу правого каната. Получается один длинный двойной канат, по которому мастер спускается вниз. Внизу мастер спустит весь двойной канат, потянув за кольцо бывшего левого каната.

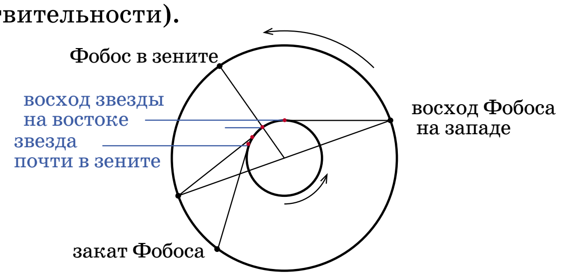
МАРС

Задача для старших. Как связаны масса атмосферы и давление на поверхности планеты?

Толщина атмосферы порядка 100 км (и у Земли, и у Марса) мала по сравнению с радиусом планеты. Поэтому давление $p=\frac{m_{атм}g}{S}=m_{атм}\frac{GM}{4\pi R^4}$, где M, R – соответственно масса и радиус планеты. Отсюда

$$\frac{p_З}{p_М}=\frac{m_{атмЗ}}{m_{атмМ}}\frac{M_З}{M_М}\frac{R_М^{\,4}}{R_З^{\,4}}=\frac{m_{атмЗ}}{m_{атмМ}}\frac{\rho_З}{\rho_М}\frac{R_М}{R_З}.$$

Задача. См. рисунок – вращение Марса и орбитальное движение Фобоса (отношение радиусов планеты и орбиты спутника – как в действительности).

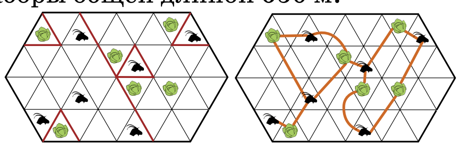


КВЕВРИ

В открытом сосуде вино долго храниться не может, но выпить за раз 1000 л трудно. Поэтому первым открывали самый маленький сосуд – 100 л. Когда вино из него выпивали, открывали следующий – 200 л. Половину выпивали, а половину переливали в пустой 100-литровый сосуд. И так далее, пока не доходили до самого большого квеври: его содержимое распределяли по более мелким, к тому моменту уже пустым.

XXVIII МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК 6 КЛАСС

1. На левом рисунке показано, как построить заборы общей длиной 650 м.



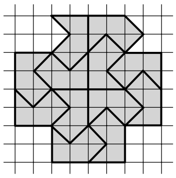
Комментарий. Докажем, что забор меньшей длины построить нельзя. На рисунке показаны 13 непересекающихся путей, по которому одна из коз доберётся до капусты. Каждый путь должен быть перекрыт забором, причём невозможно одним забором перекрыть сразу два пути. Значит, потребуется как минимум 13 заборов по 50 м.

2. Ответ: нет, не может.

Двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6, 8, чётны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках нет смысла. Остаются 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, из них можно сложить составное число 39. Если они записаны на одной карточке, на второй записаны 1 и 7, и можно сложить составное число 91.

3. По условию, синие грани составляют 1/3 от их общего числа. На поверхности большого куба мы видим ровно половину граней каждого кубика (три из шести), то есть мы видим половину всех граней. Синих из них $2/3$, то есть $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ от их общего числа. Значит, все синие грани снаружи, и мы можем повернуть каждый кубик, спрятав эти грани внутрь.

4. См. рисунок.



5. Ответ: 23.

Разделим сначала две пачки печенья. Осталось одно лишнее. Разделим третью пачку. В ней $13-1=12$ лишних печений. Но тогда в двух пачках должно было быть $12 \cdot 2=24$ лишних печенья. Почему же на самом деле одно? Потому что $24-1=23$ печенья туристы смогли разделить поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

Комментарий. Количество печений в пачке из условия задачи узнать нельзя. Их могло быть 12, 35, 58 и т. д.

6. Ответ: да, есть.

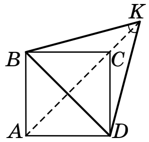
Иван может разбить пленников на 20 пар и одну тройку и велеть Кощею сказать каждому, что все, кроме входящих с ним в одну пару (тройку), – оборотни. Тогда условие будет выполнено, а переправиться пленники смогут вот как. Назовём пленников из тройки A, B и C. Сначала переправляются A и B, потом A возвращается обратно. Затем переправляется некоторая пара, а возвращается B. В результате одна пара пленников переправлена на берег, а все остальные и лодка находятся на острове. Аналогично переправляются остальные пары. Затем переправляются A и B, A возвращается и перевозит C. После этого C может отправиться за Иваном. При такой переправе никто в лодке никакой новой информации об оборотнях не узнал.

7 КЛАСС

2. Ответ: да, могло.

Подойдут гирьки 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г. Первая и вторая гирьки вместе весят 100 г, первая и третья – 101 г, а вторая и третья – 102 г.

4. Ответ: 30°.



Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, имеем $DK=BK$. По условию $BK=AC$. А так как диагонали в квадрате равны, $AC=BD$. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны, то есть он равносторонний, и $\angle BKD=60^\circ$. Опять же в силу симметрии относительно прямой AC имеем $\angle BKC=\angle DKC$, а в сумме эти углы составляют угол в 60°, то есть каждый из них равен 30°.

5. Пусть сумма чисел в одной из частей равна x, в другой y и y делится на x. Тогда и $x+y$ делится на x, а это сумма всех чисел, она равна $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Значит, меньшая из сумм частей является делителем числа 36. Верно и обратное: если 36 делится на x, то и оставшаяся сумма $36-x$ делится на x.

а) **Ответ:** да, можно: см. рисунок.

2		1		4
7	3	5	6	8

Для фигуры, заполненной как на рисунке, при разрезании на две части получаются такие меньшие суммы: 2, $2+7=9$, $2+7+3=12$, 1, $6+8+4=18$, $8+4=12$, 4. Все они – делители числа 36.

б) **Ответ:** нет, нельзя.

Выпишем все делители числа 36, меньшие этого числа, и их дополнения до 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30, 32, 33, 34, 35. Пусть удалось расставить числа в полоске требуемым образом. Выпишем сумму чисел в первой клетке, первых двух клетках, первых трёх и т. д. Получится возрастающая последовательность из восьми чисел, первое из которых не больше 8, а последнее равно 36. При этом соседние члены этой последовательности различаются не больше чем на 8. В последовательности должно быть число 12, ведь иначе найдутся два соседних числа, одно из которых не больше 9, а другое не меньше 18, то есть разность будет не меньше 9 – противоречие. Аналогично в последовательности будут числа 18 и 24. Но тогда в двух разных клетках должно стоять число $6=18-12=24-18$. Противоречие.

6. Представим, что все 49 детей стоят в коридоре, и будем постепенно запускать их в класс, причём так, чтобы в классе в любой момент дети были разбиты на требуемые группы. Пусть в коридоре стоит школьник Фёдор. Если он знаком с каким-то другим школьником, стоящим в коридоре, то просто запустим их двоих в класс. Иначе все знакомые Фёдора уже в классе. Так как в классе менее 50 детей, они разбиты менее чем на 25 групп. Значит, среди знакомых Фёдора какие-то двое находятся в одной группе. Если это группа из 2 детей, впустим Фёдора в класс, добавив его к этой группе. Если же это группа из 3 детей, попросим одного из знакомых Фёдора образовать с ним группу, а оставшихся детей оставим вдвоём. Так, постепенно впуская детей в класс, мы добьёмся того, что все будут разделены на требуемые группы.