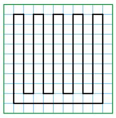
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 3, 2017)

31. *Барон Мюнхгаузен утверждает, что когда он обходит снаружи свой замок вдоль его стен и возвращается в исходную точку, то проходит больше 800 метров, а когда он идёт вдоль забора, которым обнесён замок, и возвращается в исходную точку, то проходит меньше 400 метров. Могут ли слова барона быть правдой?*



Ответ: да, могут. Например, если забор и замок, как на рисунке, а размер клетки 9 м. Тогда периметр замка 828 м, забор – 396 м.

32. *Вы наверняка знаете, что таблица 3×3, заполненная целыми числами от 1 до 9 так, что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинаковы, называется магическим квадратом 3×3 (см. пример на рисунке).*

2	7	6
9	5	1
4	3	8

а) Подберите 9 различных целых чисел и заполните ими таблицу 3×3 так, чтобы произведения чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях были одинаковы.

б) Можно ли подобрать эти различные целые числа в предыдущем пункте так, чтобы среди них были 15 и 25?

а) В магическом квадрате из условия вместо каждого числа x напишем 2^x. Так как $2^a\cdot 2^b\cdot 2^c = 2^{a+b+c}$, то произведения в строках, столбцах и диагоналях полученного квадрата равны 2^{15}.

б) Возьмём две магические таблицы из 0, 1 и 2, изображённые ниже. Если вместо каждого числа x таблицы 1 написать 3^x, а вместо каждого числа x таблицы 2 записать 5^x, получатся таблицы 3 и 4. «Перемножив» их, получим таблицу, все числа которой различны, а произведения в строках, столбцах и диагоналях равны $3^3\cdot 5^3$.

Табл. 1

2	0	1
0	1	2
1	2	0

Табл. 2

1	0	2
2	1	0
0	2	1

↓

Табл. 3

9	1	3
1	3	9
3	9	1

×

Табл. 4

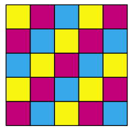
5	1	25
25	5	1
1	25	5

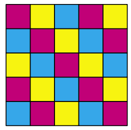
=

Табл. 5

45	1	75
25	15	9
3	225	5

33. *Квантик и Ноутик играют в необычный морской бой. Ноутик составил из восьми кораблей 1×3 и одного корабля 1×1 квадрат 5×5 клеток (корабли стоят вплотную друг к другу). За ход Квантик делает выстрел в одну из клеток, а Ноутик сообщает, в какой корабль Квантик попал и какие клетки квадрата занимает этот корабль. Цель Квантика – поразить корабль 1×1. За какое наименьшее число выстрелов он может гарантированно этого добиться?*





Ответ: за один. Оказывается, как Ноутик ни расставит корабли, в центре всегда окажется корабль 1×1, куда и будет стрелять Квантик. Действительно, покрасим наш квадрат в три цвета по диагоналям, чередуя цвета по циклу, как на первом рисунке. Заметим, что синих и жёлтых клеток поровну, а розовых на одну больше. Любой корабль 3×1 займёт три клетки разного цвета, поэтому лишняя розовая клетка достанется кораблю 1×1. Точно так же докажем, что и на втором рисунке корабль 1×1 занимает розовую клетку. Но только центральная клетка имеет розовый цвет на обоих рисунках, поэтому на ней и будет стоять корабль 1×1.

34. *Есть 12 карточек, на каждой написана одна ненулевая цифра. Известно, что из этих карточек можно составить два шестизначных числа, сумма которых равна 1099999. Докажите, что из этих карточек можно составить два шестизначных числа, сумма которых равна одному миллиону.*

Пусть $A+B=1099999$, где A и B – шестизначные числа. Если выкинуть из A и B первую цифру, сумма полученных пятизначных чисел будет оканчиваться на 99999, а значит, она равна 99999, потому что сумма любых двух пятизначных чисел меньше 199999. Отсюда сумма первых цифр чисел A и B равна 10. Значит, если в числах A и B поставить первую цифру на последнее место, то в сумме получится $999990+10=1000000$.

35. *Имеются восемь монет, семь из которых одинаковые, а одна фальшивая и отличается по весу (неизвестно, в какую сторону). Также имеются чашечные весы, которые показывают правильный результат, если на чашах разный вес, а если вес одинаковый, то вместо равенства показывают что попало.*

а) Придумайте способ найти фальшивую монету и узнать, тяжелее она настоящих или легче.

б) Можно ли гарантированно найти фальшивую монету всего за 4 взвешивания?

Решим сразу пункт б). **Ответ:** можно. Пронумеруем монеты и сначала сравним наборы

1 2 3 4 и 5 6 7 8, а потом – наборы 1 2 5 6 и 3 4 7 8 (поменяли на чашах пару монет 3, 4 с парой монет 5, 6) . Если показания весов одинаковые, то фальшивую монету мы не перекладывали, и она среди 1, 2, 7 и 8. Если показания разные, то фальшивая среди 3, 4, 5 и 6. Переобозначим «подозрительные» монеты буквами *А*, *Б*, *В* и *Г*, так что *А* и *Б* лежат на «лёгкой чаше», а *В* и *Г* – на «тяжёлой» при втором взвешивании. Теперь меняем местами на чашах монеты *Б* и *В*. Если показания весов не изменились, то фальшивая среди монет *А* и *Г*, причём если фальшивая легче настоящей, то это монета *А*, а иначе – *Г*. Если показания весов поменялись, то под подозрением остаются монеты *Б* и *В*.

Так как мы знаем, какая из них тяжелее, мы выделим из них фальшивую, как только поймём, тяжелее фальшивая монета настоящей или легче. Для этого достаточно сравнить вес двух подозрительных монет с любыми двумя из оставшихся, которые все настоящие.

БИЛЬЯЖ («Квантик» № 4, 2017)

Ответ: бильяж с углом 90°. Дело в том, что в бильяже с углом 90° наше отражение – это как будто нас прокрутили вокруг оси бильяжа (отрезок скрепления зеркал) ровно на пол-оборота. Если бильяж немного покрутить туда-сюда, то его ось останется неподвижной, а значит, и отражение будет стоять на месте. А вот в бильяже с углом 60° наше отражение будет таким же, как если бы мы смотрелись в обычное зеркало, плоскость которого перпендикулярна биссектрисе угла бильяжа. Понятно, что если крутить это обычное зеркало, то отражение будет двигаться.

Давайте разберёмся, почему так происходит, на примере бильяжа с углом 90°. Будем считать для простоты, что зеркала очень большие. Продлим зеркала во все стороны. Пространство разрежется на 4 части: одну настоящую и три зазеркальных, как на рисунке 1. Пусть в настоящей части расположена буква «Р». Отразим её относительно сторон бильяжа и получим перевёрнутую букву «Р» в каждой из соседних зазеркальных частей. Отразим и их относительно оставшихся сторон и получим обычную (только повёрнутую) букву «Р» в оставшейся зазеркальной части. Вот эти три буквы «Р» мы и увидим в зеркале, причём последняя буква «Р» получается из исходной поворотом на 180° вокруг вершины угла. Доказательство оставляем читателю. На рисунке показан путь луча света от буквы «Р» к наблюдателю после двух отражений от зеркал. Аналогично строится картинка для бильяжа с углом 60° (рис. 2).

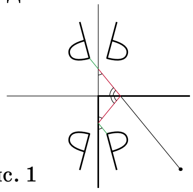


Рис. 1

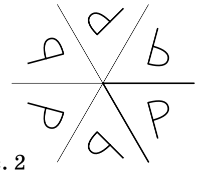


Рис. 2

Если зеркала бильяжа небольшие, и мы стоим от него достаточно далеко, то из трёх своих отражений в случае угла 90° или из пяти своих отражений в случае угла 60° наблюдатель увидит только одно в самой дальней зазеркальной части.

ВОКРУГ СПОРТА («Квантик» № 4, 2017)

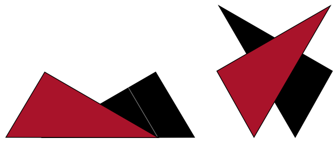
1. Спортсменам, прыгающим с трамплина на лыжах, попутный ветер только вредит. Лыжник летит, наклонясь вперёд, поэтому встречный ветер его толкает не только назад, но и вверх, позволяя пролететь дальше.

2. Такое возможно в командном виде спорта. Так, в эстафете 4×100 м легендарный спринтер Усейн Болт был лишён медали из-за того, что допинг принимал его партнер по эстафете.

3. Речь идёт о сборных СССР (1988), СНГ (1992) и России.

4. В видах спорта, где участники движутся плотной кучей, столкновение может отобрать шансы на победу сразу у многих. Это и произошло на Олимпиаде 2002 года на соревновании по шорт-треку (скоростному бегу на коньках на короткой дорожке). Один из спортсменов упал, увлекая за собой остальных лидеров, и явный аутсайдер стал олимпийским чемпионом. Подробнее см. видео: youtu.be/mt9nmACiyWA

ДВАЖДЫ ПОДУМАЙ («Квантик» № 4, 2017)

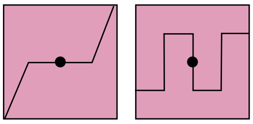


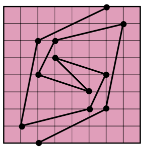
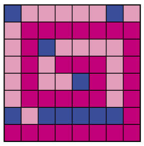
ЮПИТЕР

О фотографиях: это совсем разные тройки пятен. По расположению полос видно, что на первой фотографии все белые пятна находятся примерно на одной широте, а на второй – наоборот, на одном меридиане.

Про Галилея: он открыл 4 спутника Юпитера и этим произвёл революцию в представлениях об устройстве мира. О спутниках Юпитера мы расскажем в следующем номере.

КАК РАЗДЕЛИТЬ КВАДРАТ НА ДВЕ РАВНЫЕ ЧАСТИ?

1.  **2.** Бесконечно много.

3. Выбрасывать не надо:  **4.** 

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ НИЖЕГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

1. Грузовиков с пятиэтажный дом, конечно, не бывает. Но и мама, наверное, повторяла сыну одно из важных жизненных правил не триста миллионов раз, а поменьше. Стало быть, маме свойствен тот же недостаток, за который она ругает сына: склонность преувеличивать. **Ответ:** (Б).

2. В русском языке есть звуки, в произнесении которых обязательно участвуют губы: согласные [б], [п], [в], [ф] и [м] (и парные к ним по мягкости), гласные [у] и [о]. В первой строке четверостишия есть звуки [б] (*братец*), [у] и [в] (*Одуванчик*; звука [о] в этом слове нет!). В третьей и четвёртой строке встречаются [о] (*что*), [п], [в’] (*просвистит*), [у] (*Тушканчик*), [п] и [о] (*придёт*). И только во второй строке губных звуков нет: именно её и можно произнести, не шевеля губами (проверьте!). **Ответ:** (Б).

3. В предложениях типа *Что ты видишь?* слово *что* означает нечто вроде «какой предмет» и выступает в роли прямого дополнения при переходном глаголе. Из четырёх приведённых вопросов так устроены три – (А), (В) и (Г): в них имеются переходные глаголы *строить*, *найти* и *потерять*. А *сидеть* – непереходный глагол, так что пример (Б) никак не может означать «Какой предмет ты здесь сидишь?». Слово *что* здесь представляет собой вопрос о **причине** сложившейся ситуации, оно сближается по смыслу со словом *почему* (или *зачем*) и является обстоятельством. **Ответ:** (Б).

4. Это задача-шутка. Чтобы её решить, заметим, что в заказах каждого из друзей все слова начинаются с одной и той же буквы: спагетти и сыр, жаркое и жюльен, котлеты и картошка.

Казалось бы, имена друзей никак не связаны с этим нашим наблюдением. Но, подумав, можно догадаться, что в варианте (А) перечислены имена, уменьшительные формы которых выглядят как Саша, Женя и Кеша, то есть как раз начинаются с нужных нам букв – С, Ж и К. **Ответ:** (А).

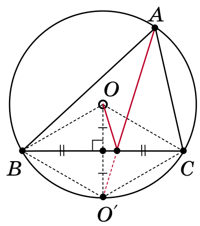
XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ, весенний тур

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1. Ответ: 20161932. Нужно дописать справа как можно меньше цифр к 2016, чтобы число поделилось на 2017. Если мы допишем одну цифру, то и разность 20170 – 2016* должна будет делиться на 2017, но она слишком мала для этого, так как не превосходит и 10. Так же не хватит двух и трёх цифр. Взяв разность 20170000 – – 2016**** максимально большой положительной, а именно $4 \cdot 2017$, получим ответ.

2. Квадратный трёхчлен с единственным корнем a и старшим коэффициентом 1 имеет вид $(x-a)^2$. Координаты точки на его графике имеют вид $(p, (p-a)^2)$. Трёхчлен $x^2+px+(p-a)^2$ имеет единственный корень, когда его дискриминант равен нулю, то есть $\left(\frac{p}{2}\right)^2=(p-a)^2$. Подходят $p=2a$ или $p=\frac{2a}{3}$.

3. Отразим относительно BC центр O описанной окружности Ω треугольника ABC. Получим точку O'. Так как $\angle BO'C=\angle BOC=$ $=2\angle A=120^\circ=180^\circ-\angle A$, то O' лежит на Ω. Так как O лежит на серединном перпендикуляре к BC, то O' – середина дуги BC, то есть биссектриса угла A проходит через O'. Это и значит, что после отражения шарик пройдёт через O.



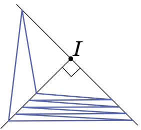
4. Обозначим первые слева 25 мест в ряду буквой A, вторые 25 – B, третьи и четвёртые – C и D. Каждый раз, выбирая 50 детей, будем выстраивать их по убыванию роста. Сделаем это сначала с AB, затем с BC и, наконец, с CD. После первой перестановки 25 самых низких детей окажутся в куске BCD, после второй – в CD, после третьей – в D. Таким образом, 25 самых низких детей уже расставлены правильно. Снова выполним перестановки AB и BC. Они расставят в нужном порядке следующих по росту 25 детей в куске C. Последняя перестановка AB расставит правильно 50 самых высоких.

Замечания. 1. Набор перестановок AB, CD, BC, AB, CD, BC тоже подходит. 2. За пять перестановок обратный порядок детей не перестроить.

5. Ответы: а) Да; **б)** нет. Наличие общей точки у всех построенных окружностей равносильно существованию точки I, из которой каждая сторона многоугольника видна под прямым углом.

а) См. пример на рисунке вверху с. 31.

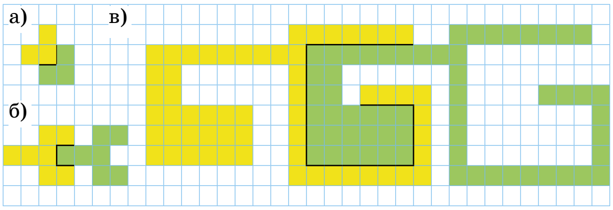
б) Пусть нашлась такая точка I для многоугольника $A_1 \ldots A_{11}$. Тогда $IA_1 \perp IA_2 \perp \ldots \perp IA_{11} \perp IA_1$, откуда $IA_1 \parallel IA_3 \parallel \ldots \parallel IA_{11} \parallel IA_2$. Противоречие.



Сложный вариант, 8 – 9 классы

1. Из условия следует, что был участник, сыгравший не менее половины своих игр с земляками. Так как он всего сыграл 9 игр, участников из его города не менее 6. Значит, в каждом туре была игра между участниками из этого города.

2. Ответ: везде можно, см. примеры.

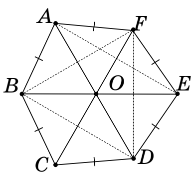


Замечание. Для любого разреза в виде незамкнутой несамопересекающейся ломаной можно придумать многоугольник, который будет делиться этим разрезом на две одинаковые части.

3. а) Ответ: да. Возьмём число 2 и 1024 числа, равных $\frac{1}{2}$. Тогда $a_n = 2^n + \frac{1024}{2^n}$. Видно, что до $n = 5$ последовательность убывает ($2 + 512$, $4 + 256$, $8 + 128$, $16 + 64$, $32 + 32$), а далее возрастает ($64 + 16$, $128 + 8$, ...).

б) Ответ: нет. Предположим противное. Тогда $a_n < a_5$ при $n \neq 5$. Среди исходных чисел было число $x > 1$, иначе бы последовательность никогда не возрастала. Но $a_n \geqslant x^n$ для всех n. А последовательность x^n не ограничена. Противоречие.

4. Так как треугольники ABD и EDB равны по трём сторонам, они совмещаются друг с другом симметрией относительно серединного перпендикуляра к BD (так как A и E по одну сторону от BD). Значит, этот перпендикуляр совпадает с серединным перпендикуляром к AE, а так как $AF = AE$ и $BC = CD$, он является осью симметрии шестиугольника. Аналогично прямые AD и BE – оси симметрии шестиугольника. Получаем, что треугольник BFD имеет три оси симметрии, то есть он правильный. На его стороны опираются одинаковые равнобедренные треугольники ABF, EFD, CDB, торчащие наружу (так как шестиугольник выпуклый). Значит, увеличивая радиус и не меняя центр вписанной окружности треугольника BFD, мы сможем получить окружность, касающуюся всех сторон шестиугольника.



5. Ответ: 7 гирь.

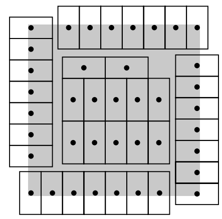
Пример. Гирями 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 г можно взвесить любой целый вес от 1 г до 127 г. Оставим от каждой гири лишь треть. Веса гирь станут нецелыми, и ими можно будет взвесить любой целый вес от 1 г до 42 г.

Оценка. Пусть в наборе 6 гирь. Разных поднаборов $2^6 = 64$. Покрасим одну гирю жёлтым и разобьём поднаборы на пары, отличающиеся только наличием в них жёлтой гири. Так как веса парных поднаборов отличаются нецелым весом жёлтой гири, максимум один из них может иметь целый вес. Поэтому поднаборов с целым весом не более 32, что меньше 40. Противоречие.

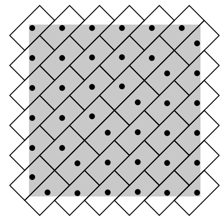
6. Пусть кузнечик пропрыгал полоску из 62 клеток. Покрасим 8 левых её клеток белым, следующие 10 – чёрным, потом снова 8 – белым и так далее. Всего будет 32 белых клетки и 30 чёрных. Поскольку разность количеств белых и чёрных клеток больше 1, то был прыжок между белыми клетками. Но такие прыжки невозможны.

Упражнение. Докажите, что числа 59, 60, 61, 63, 64, 65, 66 тоже не пропрыгиваемы.

7. а)



б)



в) Расположим 35 доминошек так, как на левом рисунке ниже. Центры «граничных» доминошек образуют прямоугольник $8 \times 7{,}5$. Чуть сдвинем 7 вертикальных рядов из 5 доминошек вверх (каждый ряд на своё расстояние), чтобы центры «граничных» доминошек образовали параллелограмм (красный на правом рисунке ниже). Расстояние между его верхней и нижней сторонами меньше 8, сами стороны равны по 7,5 и совсем немного сдвинуты друг относительно друга. Поэтому этот параллелограмм можно накрыть квадратом 8×8.