НАШ КОНКУРС (**«Квантик» № 6, 2017**)

46. *На конференции присутствовали представители двух конкурирующих фирм «Megasoft» и «Gamesoft» Алекс, Бен и Карл. Представители одной и той же компании всегда говорят правду друг другу и врут конкурентам. Алекс сказал Бену: «Карл из Megasoft». Бен ответил: «Я тоже». Где работает Алекс?*

Ответ: в Megasoft. Если Алекс и Бен из одной компании, то Бен сказал правду, значит, они оба из Megasoft. Если Алекс и Бен из разных компаний, то Бен соврал, то есть он из Gamesoft, а Алекс снова из Megasoft.

47. *У двух игроков есть кубическая картонная коробка, в которой лежит приз. Они по очереди выбирают одно из рёбер коробки и разрезают коробку вдоль этого ребра. Выигрывает тот, после чьего хода можно открыть коробку и достать приз. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или второй игрок? Коробка открывается, если она разрезана вдоль трёх рёбер одной грани.*

Ответ: второй. Пусть в ответ на начальный ход первого второй разрежет противоположное параллельное ребро куба. Какое бы следующее ребро ни разрезал первый, оно окажется на одной грани с одним из двух уже разрезанных рёбер. Тогда второй разрежет ещё одно ребро на той же грани, и коробка откроется.

48. *Костя приехал в аэропорт, посмотрел на электронное табло, которое показывает время (часы и минуты), и заметил, что на табло горят четыре различные цифры. Когда он посмотрел на табло в следующий раз, там горели четыре другие различные цифры. Какое наименьшее время могло пройти между двумя этими моментами?*

Ответ: 36 минут. Могло ли быть меньше? Если да, то Костя смотрел на табло в два соседних часа с разным числом десятков в числе часов. Среди вариантов 09 и 10, 19 и 20, 23 и 00 остаётся только второй, потому что в остальных повторяется цифра 0. Минимальное число минут после «20:» равно 34, потому что цифры 0, 1 и 2 уже встречаются. Максимальное число минут после «19:» – это 58, потому что цифра 9 уже встречается. С 19:58 до 20:34 прошло 36 минут.

49. *Метроморфы могут менять свой рост. Двадцать пять метроморфов стали в одну шеренгу, рост каждого – целое число сантиметров. В конце каждой минуты все метроморфы, слева и справа от которых более низкие, чем они, уменьшают свой рост на 1 см, а те, слева и справа от которых более высокие, увеличивают свой рост на 1 см. Остальные, в том числе и стоящие по краям шеренги, не меняют роста.*

а) Докажите, что через несколько минут все метроморфы перестанут менять свой рост.

б) Верно ли это утверждение, если метроморфы уменьшают и увеличивают свой рост на 2 см?

а) Предположим, что метроморфы A и $Б$ стоят рядом и рост A с какого-то момента перестал меняться. Докажем, что рост $Б$ тоже когда-нибудь перестанет изменяться. Разница в росте A и $Б$ может только уменьшаться, причём если в начале $Б$ был выше A, то $Б$ никогда не станет ниже A и наоборот. Когда разница в росте A и $Б$ достигнет своего минимума, рост $Б$ перестанет меняться.

Рост крайних метроморфов не меняется, значит, как мы доказали, рост их соседей тоже когда-нибудь перестанет меняться, потом и рост соседей их соседей и так далее, пока все метроморфы в шеренге не зафиксируют свой рост.

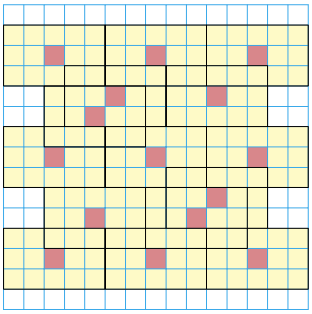
б) Неверно. Пусть метроморфы были такого роста: 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, ..., 2. Через минуту они станут такого роста: 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ..., 2. А ещё через минуту вернутся к исходному росту. Дальше всё будет повторяться до бесконечности.

50. *а) Дан клетчатый квадрат* 15×15. *Можно ли закрасить* 15 *клеток так, чтобы любой прямоугольник* 3×5 *со сторонами, параллельными сторонам квадрата, составленный из клеток, содержал хоть одну закрашенную клетку?*

б) А можно ли так закрасить всего 14 *клеток?*

а) Одно из решений приведено на рисунке на с. 29. Можете убедиться самостоятельно, что в каждом прямоугольнике 5×3 (со сторонами, идущими вдоль сетки) найдётся один из 15 красных квадратиков, но всё же мы приведём здесь объяснение. Поскольку рисунок симметричен относительно диагонали, достаточно это доказать лишь для прямоугольников 5×3, у которых горизонтальная сторона равна 5.

Для каждого прямоугольника с горизонтальной стороной 3 симметричный ему будет с горизонтальной стороной 5.



Вместе с каждой красной клеткой нарисуем жёлтую прямоугольную область 5×3 с центром в этой клетке и заметим, что если центр прямоугольника попал в жёлтую область, то он содержит красную клетку – центр области. Жёлтые области на рисунке покрывают все возможные положения центров прямоугольников 5×3 (эти положения образуют центральный прямоугольник 11×13). Значит, любой прямоугольник 5×3 содержит красную клетку.

Решение на рисунке не единственное, попробуйте найти ещё хотя бы два.

б) Квадрат 15×15 можно разбить на 15 прямоугольников 5×3. Тогда в каждом прямоугольнике должна быть красная клетка! Значит, клеток всего не меньше 15.

Это соображение может помочь строить пример в пункте а). Дело в том, что квадрат можно разбить на 15 прямоугольников 5×3 двумя способами (симметричными друг другу относительно диагонали квадрата), и для каждого способа в каждом прямоугольнике должна найтись красная клетка.

БЛИКИ НА СКАМЕЙКЕ

(«Квантик» № 7, 2017)

Поскольку фонарь расположен далеко, он освещает скамейку пучком почти параллельных лучей света. Они падают на каждую цилиндрическую перекладину, из которых собрана скамейка, под одним и тем же углом. Отражённые лучи образуют тот же угол с цилиндром, но расходятся от него в разные стороны.

Посмотрите на фотографию, которую держит в руках Квантик. Представим себе момент, когда она была сделана, и проведём через фотоаппарат мысленную прямую, параллельную цилиндрам скамейки. Тогда все лучи, пришедшие в фотоаппарат, как отражённые, так и прямо от фонаря, составляют с этой прямой один и тот же угол. То есть образуют конус, расходящийся из фотоаппарата и имеющий в качестве оси проведённую нами мысленную прямую.

На снимке конус превращается в окружность, на которой располагаются блики и фонарь, а мысленная прямая – в точку, к которой сходятся цилиндры скамейки.

САТУРН – ПЛАНЕТА В ШЛЯПЕ

1. Во времена Галилея (начало XVII века) Уран и Нептун ещё не были известны: невооружённым глазом их не видно. Уран открыл Уильям Гершель в 1781 году.

2. Кольца расположены ровно над экватором Сатурна, который наклонён под углом приблизительно 28° к плоскости его орбиты. По сравнению с расстоянием до Сатурна Земля находится почти рядом с Солнцем, поэтому когда на Сатурне весна или осень, мы колец не видим: они повёрнуты к нам (и к Солнцу) ребром. А когда на Сатурне лето или зима, кольца видно лучше всего.

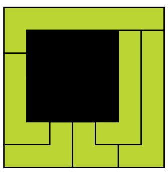
Ещё и поэтому (а не только потому, что состоят из камушков и пыли, а не изо льда) кольца Юпитера с Земли не видны: ось Юпитера, как мы помним из статьи «Времена года на Земле и других планетах» в №6 «Квантика» за 2016 год, перпендикулярна плоскости его орбиты, и кольца всегда видны «с ребра».

3. При толщине бумажного кольца 0,1 мм его диаметр должен быть 25 м, так что не то что в комнату, а даже и на детскую площадку во дворе оно не влезло бы.

4. Космический аппарат находится ЗА Сатурном и фотографирует затмение Солнца Сатурном. Солнце подсвечивает кольца и край атмосферы, а сам Сатурн мы видим с теневой стороны.

5. Тонкая полоса – это кольцо, видимое с ребра. Толстая чёрная полоса на Сатурне – тень кольца. Большой спутник на фото – Титан.

L-ГОЛОВОЛОМКА



$n=1$

$n=6$

Левый рисунок симметричен относительно диагонали квадрата.

КАНДИДАТ В ДЕПУТАТЫ

Первый фокус. Если в любом трёхзначном числе, состоящем из разных цифр, поменять местами первую и последнюю цифры, а потом вычесть из большего числа меньшее, то получится $\overline{abc}-\overline{cba}=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=$ $=99(a-c)$, то есть одно из следующих чисел: 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 и 891. Сумма цифр в каждом равна 18. Поэтому достаточно вычесть из 18 названное зрителем число, чтобы получить зачёркнутую им цифру.

Второй фокус. Вова просто подбирает в уме ближайший к названному числу квадрат: 49, 64, 81, 100, 121 или 144. Разность между этим квадратом и названным числом даёт число, выпавшее на красном кубике. На жёлтом кубике будет число, дающее этот ближайший квадрат. Например, зритель назвал число 78. Тогда на жёлтом кубике 9 (так как ближайший квадрат это $9\cdot9=81$), на красном кубике 3 (так как $81-78=3$).

У Кошкина бинт намотан прямо на пиджак.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КОНКУРСА «КЕНГУРУ»

1. Ответ: А.

Сначала заметим, что в условиях задачи красная лента упоминается два раза: известно, что она короче, чем Дашина, и не той длины, что Машина. Значит, эту ленту выбрала Катя. Кроме того, эта лента длиннее синей, но короче, чем лента у Даши. Тогда самая короткая лента – синяя, средняя лента – красная у Кати, а самая длинная – у Даши. Осталось заметить, что у Маши самая короткая лента (синяя), а зелёная – самая длинная. Теперь легко проверить, что единственное верное утверждение – лента Даши зелёная.

2. Ответ: Б.

Для начала заметим, что нас интересует только направление, в котором двигается Дима. Поэтому можно считать, что он доехал до центрального перекрестка, там выполнил все свои повороты и выехал через те ворота, напротив которых в итоге оказался. Тогда становится понятно, что порядок поворотов значения не имеет, а важно только их количество. Теперь остаётся заметить, что четыре поворота налево не меняют направление, два поворота направо – это то же самое, что один разворот, а два разворота тоже не меняют направления движения. Значит, можно считать, что Дима просто один раз повернул направо и выехал через ворота Б.

3. Ответ: А.

Будем говорить, что карточка лежит на столе *правильно*, если на рисунке мы видим, что справа от дырочки верёвочка проходит под карточкой, а слева – над ней. Иначе будем говорить, что карточка лежит *неправильно*. Заметим, что если мы возьмёмся за верёвочку слева от карточек и поднимем её, то правильно лежащие карточки будут обращены вверх той же стороной, которую мы видим на рисунке. А неправильно лежащие карточки при подъёме развернутся, и мы увидим их с другой стороны.

Теперь посмотрим на рисунок в условии задачи: на нём две средние карточки обращены вверх тёмными сторонами, а две крайние – белыми (но если мы продвинем, например, верхнюю карточку вдоль верёвочки так, чтобы она оказалась в самом низу, то она всё равно будет обращена вверх белой стороной). Это значит, что среди предложенных рисунков надо выбрать такой, на котором после подъёма две соседние карточки будут «смотреть вверх» одной стороной, а две другие – другой. Этому условию отвечает только рисунок А: на нём крайние карточки лежат неправильно, а средние – правильно, причём сейчас все они обращены к нам тёмной стороной. Значит, если мы возьмёмся за верёвочку слева от карточек и поднимем её, то средние карточки мы по-прежнему увидим тёмными, а крайние развернутся вверх белой стороной.

Подняв таким же образом верёвочку с рисунка Б, мы увидим сверху подряд три тёмные карточки и одну светлую (внизу). Все карточки с рисунка В мы увидим белыми. Рисунок Г даст нам три подряд белые карточки и ниже – одну тёмную. Наконец, рисунок Д даёт нам сверху одну тёмную карточку и под ней три белые.

4. Ответ: Г.

Пусть автомобиль выехал в 16:00, тогда он приехал в 16:35. Обогнал он те автобусы, которые выехали раньше него, а приедут позже. Так как автобус едет ровно час, то нам надо подсчитать количество автобусов, которые отправились из аэропорта позже 15:35, но раньше 16:00. Последний из этих автобусов выехал за две минуты до автомобиля, то есть в 15:58. К этому моменту с 15:35 прошло 23 минуты, но

$23 = 3 \cdot 7 + 2$, следовательно, кроме этого последнего автобуса автомобиль обгонит ещё семь (самый ранний из них выехал в 15:37).

5. Ответ: Г.

Образующиеся на листе дырки должны быть симметричными относительно линий сгиба. Это верно только для рисунка Г.

6. Ответ: Д.

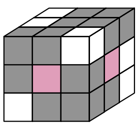
Заметим, что если ответ в примере верный, то либо обе клавиши работают правильно, либо обе работают неправильно. Если же ответ в примере неверный, то неправильно работает точно одна из использованных клавиш. Из третьего примера видно, что неправильно работает то ли клавиша с цифрой 4, то ли клавиша с цифрой 2. Если клавиша 4 – неправильная, то из последнего примера следует, что местами поменялись 3 и 4. Но тогда клавиша с цифрой 8 должна работать правильно, и во втором примере должно было бы получаться 32. Значит, клавиша 4 работает правильно, и с какой-то другой цифрой поменялась цифра 2. Но тогда из первого примера следует, что она поменялась с цифрой 7.

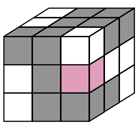
7. Ответ: В.

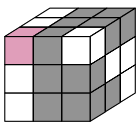
Внимательно присмотревшись к рисунку, мы видим, что конструкция имеет ширину 2, высоту 4 и длину тоже 4. Значит, наименьший параллелепипед, из которого могла получиться такая конструкция, имеет размеры $2 \times 4 \times 4$.

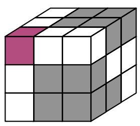
8. Ответ: Д.

Заметим, что кубик Д собрать из таких брусков возможно: все они будут размещены горизонтально и параллельно переднему краю рисунка. Положение восьми блоков определяется по восьми белым кубикам, которые видны на рисунке. Девятый блок – средний в нижнем ряду, расположен так, что белый кубик на нём не виден. По разным причинам остальные четыре кубика собрать из таких брусков нельзя. Например, на рисунке *А* два отмеченных белых кубика не могут принадлежать непересекающимся брускам. На рисунках *Б*, *В* и *Г* отмечено по одному кубику, которые, не могут принадлежать ни одному бруску.

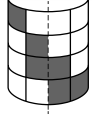

А


Б


В


Г

9. Ответ: В.



Заметим, что если на невидимой стороне цилиндра нет закрашенных клеток, то, проведя на его поверхности разрез так, как указано на рисунке, мы получим развёртку В. Остальные развёртки не подходят.

10. Ответ: Г.

Будем считать, что диагональ маленького светлого квадрата равна двум единицам. Тогда сторона скатерти равна 10, а большой светлый квадрат имеет размеры 6×6. Следовательно, суммарная площадь светлой области равна $16 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 68$ (квадрат с диагональю 2 имеет площадь 2). Значит, площадь тёмной области равна $10 \cdot 10 - 68 = 32$. А так как площадь всей скатерти равна 100, то тёмная часть составляет от неё 32%.

11. Ответ: В.

За 60 минут минутная стрелка поворачивается на $360°$, следовательно, за 1 минуту она поворачивается на $6°$, или на $6 \cdot 60 = 360$ минут.

12. Ответ: Б.

Заметим, что расстояние от центра колеса до ближайшего склона холма должно быть постоянным (и равным радиусу колеса). Помня это, несложно убедиться в том, что правильной траекторией центра колеса является вариант Б.

13. Ответ: Д.

Обозначим через O точку, в которую попали вершины B и D после сгибания листа. Тогда $AO = AB = 1$ и $OC = DC = 1$. По неравенству треугольника получаем: $AO + OC \geqslant AC$, то есть $AC \leqslant 2$. Итак, диагональ данного прямоугольника не превосходит 2. По теореме Пифагора отсюда следует, что другая сторона не превосходит $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Покажем, что прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$ можно сложить нужным образом. За линии сгиба возьмём перпендикуляры, опущенные на диагональ BD из вершин A и C. Тогда точка O будет серединой диагонали BD (заметим, что в таком прямоугольнике диагонали образуют со сторонами углы в $30°$ и $60°$, поэтому треугольники AOB и COD будут правильными). Итак, наибольшее возможное значение стороны AD равно $\sqrt{3}$.