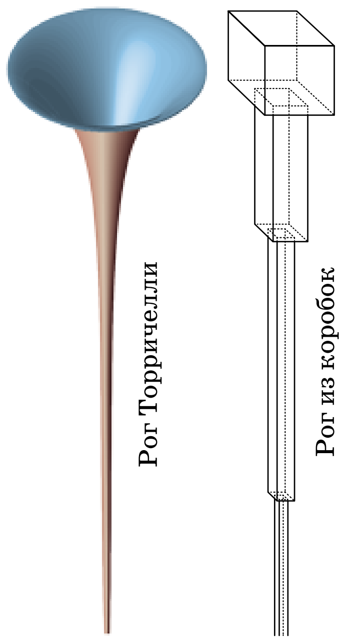
Алексей Панов

РОГ АРХАНГЕЛА ГАВРИИЛА, ОН ЖЕ РОГ ТОРРИЧЕЛЛИ

Конечно же, ни у Гавриила, ни у Торричелли рогов не было. Здесь рог – это всего лишь труба или горн, с помощью которого архангел Гавриил возвестит приход Судного дня, а Эванджелиста Торричелли придумал математический аналог этого горна. Раньше я уже писал об этом великолепном достижении Торричелли («Малярный парадокс», «Квант» №6 за 1986 год). Сейчас я расскажу о том же самом, но чуть попроще.

Эванджелиста Торричелли, портрет кисти Лоренцо Липпи (около 1647 г.)

Свой рог мы будем собирать из водонепроницаемых прямоугольных коробок. Самая верхняя из них имеет форму куба с единичными рёбрами, но без верхней крышки. Та коробка, что под ней, вытянута по вертикали. Её вертикальные рёбра в два раза длиннее, они имеют длину 2, а горизонтальные в два раза короче – имеют длину $\frac{1}{2}$. В дне первой коробки сделано сквозное отверстие размером $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, так что любая жидкость может свободно переливаться из верхней коробки в нижнюю и обратно. Третья коробка ещё больше вытянута – её вертикальные рёбра равны 4, а горизонтальные



равны $\frac{1}{4}$. У следующей рёбра 8 и $\frac{1}{8}$, дальше идёт коробка с рёбрами 16 и $\frac{1}{16}$ и т. д.

Длина такого рога будет бесконечной.

Подсчитаем площадь его боковой поверхности. У первой коробки четыре боковые грани размером 1×1, так что площадь всех четырёх граней будет $4 \times (1 \times 1) = 4$. У второй коробки боковая грань имеет размер $2 \times \frac{1}{2} = 1$, и опять сумма площадей четырёх граней равна 4. В общем, у любой коробки площадь боковых граней равна 4. Рог состоит из бесконечного числа коробок, и у каждой коробки площадь боковых граней равна 4. Так что площадь боковых граней всего рога тоже будет равна бесконечности

$$4+4+4+4+4+\ldots=\infty.$$

Кроме боковых граней, у поверхности рога есть и горизонтальные участки. Так что *площадь всей поверхности рога* тем более *равна бесконечности*.

Теперь подсчитаем объём, заключённый внутри рога. Объём первой коробки, куба с ребром 1, равен $1 \times 1 \times 1 = 1$. Площадь основания второй коробки равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, а её высота 2, так что объём коробки равен $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{1}{2}$. Объём следующей коробки равен $\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times 4 = \frac{1}{4}$, у следующей $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 8 = \frac{1}{8}$, дальше $\left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}\right) \times 16 = \frac{1}{16}$ и т. д. Поэтому объём всего рога равен

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Но посмотрите:

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\left(2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\left(2-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}=2-\frac{1}{8},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\left(2-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}=2-\frac{1}{16}, \ldots$$

И тут отчётливо видно, что эти суммы всё ближе и ближе к 2, а значит, вся бесконечная сумма просто равна 2:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2.$$

Итак, *объём всего рога равен 2*.

В этом и состоял основной парадоксальный результат Торричелли. Он нашёл *тело, поверхность которого имеет бесконечную площадь, а объём конечен*. Этот результат шокировал современников. Торричелли был гением, он умел делать красивые вещи и доказывать результаты, которые до него не были известны. Так что его рог выглядит намного элегантнее нашего, угловатого, и применяемые им методы вычисления площадей и объёмов намного изощрённей наших.

Чтобы лучше понять, в чём заключается парадоксальность этого результата, оставим математику и перейдём на бытовой уровень. Будем считать, что единицей измерения длины у нас служит 1 дециметр, то есть 10 сантиметров. Тогда единицей измерения объёма будет 1 литр. Сходите в хозяйственный магазин и купите 2 литра голубой жидкой краски. Залейте эту краску в сконструированный нами рог. Так как его объём тоже равен двум литрам, рог будет заполнен доверху. Подождите немного, встряхните и вылейте из него всю краску обратно. Вся внутренность нашего рога окажется окрашенной в голубой цвет. В этом и заключается парадокс: нам понадобилось всего два литра краски, чтобы закрасить поверхность бесконечной площади. Этот результат и называется малярным парадоксом. Попробуйте разобраться, в чём тут дело.

Напомню ещё о двух замечательных достижениях Торричелли. Он создал в лабораторных условиях торричеллиеву пустоту и сконструировал ртутный барометр, которым до сих пор пользуются современные метеорологи. Торричелли недолгое время сотрудничал с Галилеем, после смерти которого заместил его в должности профессора математики во Флорентийской академии. Торричелли сотрудничал со многими итальянскими учёными. Один из них, Рафаэлло Маджотти, был создателем оригинального аэрогидравлического приспособления. Теперь это игрушка, известная нам под названием *декартов* или *картезианский водолаз* («Водолаз двойного действия», «Квантик» № 5 за 2017 год).

Художник Мария Усеинова