Андрей Карпов

ПОЧТИ ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Сидел я как-то вечером дома и пытался придумать задачку для школьников. Было не так много тем, по которым я хотел бы это сделать – из «кружковской» программы меня не особенно впечатляли ни комбинаторика, ни графы, ни прочие популярные темы. Поэтому выбор пал на любимую с 8 класса геометрию на клетчатой бумаге. Я взял листок и стал рисовать.

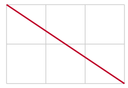

Рис.1

Начал я с одного отрезка (рис. 1). И стал думать, что можно сделать с одним отрезком. Можно пытаться, например, рисовать многоугольники, причём такие, чтобы все их стороны были равны этому отрезку, а вершины лежали в узлах сетки. Да ещё и выпуклые, чтобы не было слишком большой свободы действий. О, это кажется интересным! Из школы я помнил, что треугольник с такими свойствами построить нельзя. Можете попробовать это доказать самостоятельно; вам помогут следующие два утверждения:

а) квадрат стороны такого треугольника (если бы он существовал) – целое число;

б) площадь такого треугольника – целое или полуцелое число.

Потом я попробовал нарисовать квадрат и в этом, естественно, преуспел (рис. 2).

После этого получилось нарисовать шестиугольник (рис. 3) (естественно, не правильный – правильный нельзя построить по тем же соображениям, что и правильный треугольник).

Ага, подумал я, тут и до восьмиугольника недалеко! Его я тоже нарисовал (рис. 4).

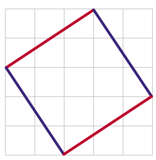

Рис. 2

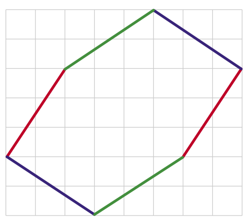

Рис. 3

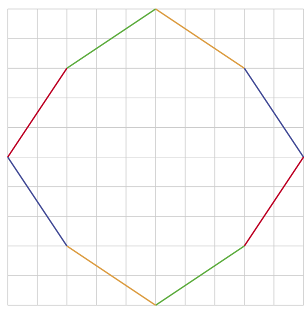

Рис.4

Теперь настало время задуматься. Что позволяет нам строить такие выпуклые многоугольники? Тот факт, что один и тот же отрезок можно расположить под разными углами. Например, для отрезка на рис. 1 возможны 4 попарно не параллельных положения, получаемых из него всеми возможными симметриями относительно линий сетки (рис. 5).

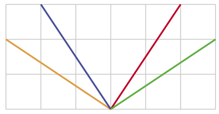

Рис.5

Заметьте: рисуя восьмиугольник, мы использовали каждое положение отрезка, причём ровно по два раза (на рисунке параллельные отрезки имеют один и тот же цвет). Когда же мы строили шестиугольник и квадрат, мы тоже не использовали никакое из положений отрезков более двух раз. Интересно, а эта закономерность сохраняется для больших многоугольников? Давайте докажем, что сохраняется.

Предположим противное – пусть нашёлся выпуклый многоугольник хотя бы с тремя сторонами, параллельными друг другу. Повернём для удобства многоугольник так, чтобы эти стороны стали вертикальными, и через каждую из них проведём прямую (красные линии на рисунке). Поскольку многоугольник выпуклый, он целиком лежит по одну сторону от каждой из прямых – либо слева, либо справа. Раз прямых три, то для двух из них он лежит по одну и ту же сторону, скажем, слева (как на рисунке 6). Тогда эти прямые должны совпадать (иначе часть многоугольника будет лежать справа от одной из них). Однако в таком случае и стороны будут совпадать, многоугольник же выпуклый!

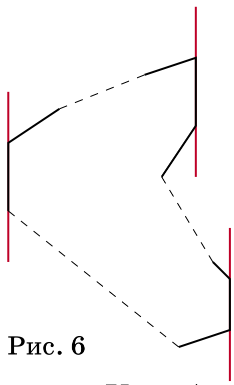

Рис. 6

«Ну вот и всё! – радостно воскликнул я. – У любого отрезка не более четырёх попарно не параллельных положений, и каждое положение встречается в многоугольнике не больше двух раз. Значит, нельзя построить выпуклый многоугольник с равными сторонами и вершинами в узлах сетки, если количество вершин больше восьми!» Но тут оказалось, что на кухне давно уже сидит папа и независимо от меня пытается решить ту же задачу. «А как же пифагоровы тройки?» – спросил он.

Я сразу всё понял. Пифагоровой тройкой называется такая тройка натуральных чисел a, b и c, что $a^2+b^2=c^2$. Тогда, взяв отрезок длины c, мы сможем расположить его вертикально, горизонтально или четырьмя способами под разными углами. На рисунке 7 показан пример для отрезка длины 5 ($5^2=3^2+4^2$).

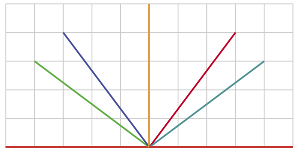

Рис. 7

Поскольку различных положений шесть, количество вершин в выпуклом многоугольнике могло бы равняться аж 12. Вот и пример такого многоугольника (рис. 8).

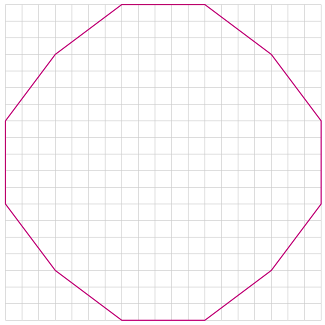

Рис. 8

А что дальше? Как получить большее возможное число сторон, то есть большее число различных положений отрезка? Я думаю, вы уже догадались: надо искать натуральные числа, *которые имеют как можно большее количество разложений в сумму двух квадратов натуральных чисел*. Действительно, если $a^2+b^2=c^2+d^2=$ $=e$, то отрезок длины $\sqrt{e}$ можно построить, например, так (рис. 9):

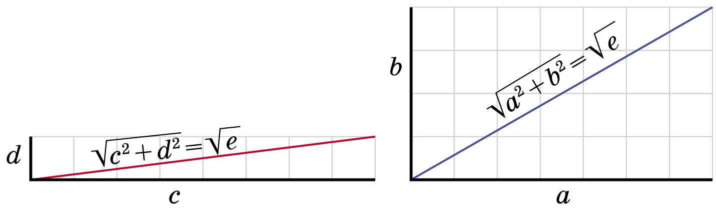

Рис. 9

В этом примере $a=7$, $b=4$, $c=8$, $d=1$, $e=65$. Заметьте, что симметриями относительно прямых, параллельных координатным осям, нельзя перевести один отрезок в другой. Тем самым эти отрезки дадут нам

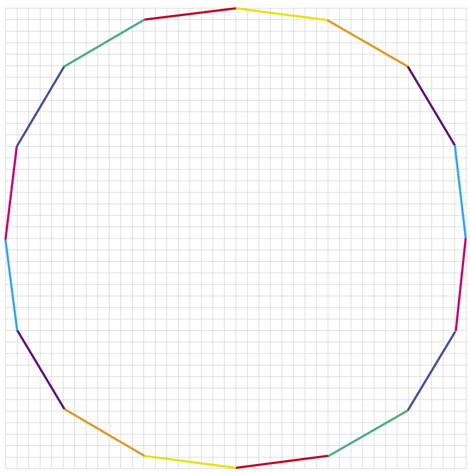

Рис. 10

восемь различных положений и возможность построить вот такой (похожий на правильный) шестнадцатиугольник (рис. 10).

Перебором на компьютере можно показать, что 65 – это наименьшее из чисел, нетривиальным образом раскладывающееся в сумму двух квадратов двумя различными способами.

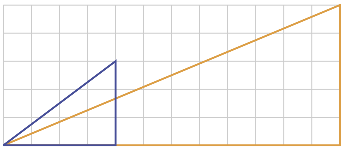

Рис. 11

Хорошо, с этим тоже понятно – можно перебирать на компьютере и искать подходящие числа. А проще можно? Можно! Для этого нам понадобятся различные пифагоровы тройки, которые дают треугольники с разными наборами углов. Например, тройки (3, 4, 5) и (5, 12, 13) (рис. 11).

Давайте подумаем, что можно сделать, скажем, с двумя такими тройками, если мы их получим. В соответствующих прямоугольных треугольниках длины катетов и гипотенуз целые. Понятно, что если увеличить все стороны первого треугольника в одно и то же число раз x, получится новый треугольник с теми же углами, что и у первого. А что если в качестве x взять длину второй гипотенузы? Ведь тогда можно «раздуть» и второй треугольник, но в y раз, где y – длина гипотенузы первого треугольника. В итоге мы получим два разных прямоугольных треугольника с равными гипотенузами (длины xy)!

Другими словами, пусть есть две пифагоровы тройки: $a^2+b^2=c^2$ и $d^2+e^2=g^2$. Рассмотрим отрезок длины cg. Его длина – целое число, а значит, его можно расположить по горизонтали и вертикали так, чтобы его концы были в узлах сетки. А ещё как? Благодаря тому, что $a^2+b^2=c^2$ и $d^2+e^2=g^2$, такие отрезки найти довольно легко: это отрезок с концами (0,0) и (ag, bg), а также отрезок с концами (0,0) и (dc, ec). Проверьте, что их длины действительно равны cg. Получается, что у нас есть как минимум три различных варианта расположения отрезка длины cg с вершинами в узлах сетки, которые не переводятся друг в друга симметриями относительно линий сетки. А это даёт не менее 10 вариантов расположения отрезка (два параллельных осям координат и восемь наклонных) и,

Художник Алексей Вайнер

как следствие, возможность построить не менее чем 20-угольник. Попробуйте построить его с помощью пифагоровых троек (3,4,5) и (5,12,13).

Может быть, набрав больше троек, удастся получить больше углов в выпуклом многоугольнике? И максимальное количество этих углов не ограничено ничем, если найти бесконечное количество разных (с точки зрения углов в соответствующих прямоугольных треугольниках) пифагоровых троек?

Рассмотрим бесконечный набор троек вида ($2n$, n^2-1, n^2+1) при натуральных n. Во-первых, они пифагоровы: $(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$. Во-вторых, отношение катетов в соответствующих треугольниках равно $\frac{2n}{n^2-1}$. Эти дроби уменьшаются с ростом n (проверьте!), и, если брать n всё больше и больше, мы получим всё более тощие треугольники со всё меньшим углом при длинном катете.

Теперь взяв сколько нужно троек из этого набора, мы построим большой многоугольник с равными сторонами так же, как делали до этого. Сначала расположим все треугольники как на рисунке 12.

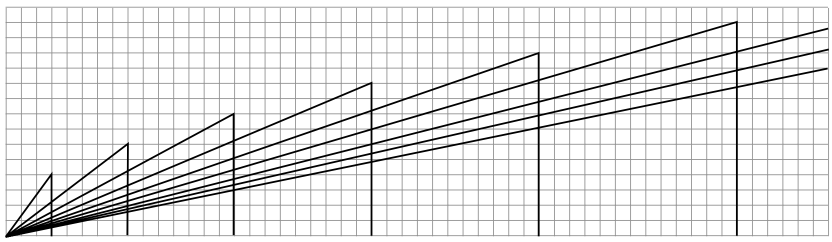

Рис. 12

Так как угол в общей вершине уменьшается с увеличением n, все гипотенузы наклонены к горизонтали под разными углами. А теперь, чтобы сделать гипотенузы равными, растянем каждый треугольник в целое число раз. Если это число-масштаб выбрать как произведение длин гипотенуз всех остальных треугольников (целое число!), то после такого растяжения длина каждой гипотенузы окажется равной произведению длин всех исходных гипотенуз. Осталось лишь, как обычно, расположить эти отрезки (и их отражения) друг за другом, так что они выстроятся в равносторонний многоугольник!

Так что число сторон в таких многоугольниках ничем не ограничено.