Игорь Акулич

ШУТНИК-ЧАСОВЩИК

– Эх, Даня, везёт же нам с тобой на ненормальных!

– В каком смысле?

– А в таком, что эти ненормальные изобретают не пойми какие часы – а нам расхлёбывать, и уже который раз! Посмотри, какую задачу я обнаружил[1]:

К первому апреля часовщик из деталей старых часов разных конструкций и из шестерёнок разных размеров собрал механизм, в котором три стрелки – часовая, минутная и секундная – вращались по часовой стрелке с разными угловыми скоростями $\omega_ч<\omega_м<\omega_с$. При установке всех стрелок на 12:00 и запуске механизма выяснилось следующее:

а) каждый раз, когда часовая стрелка проходила отметку 12:00, её обязательно обгоняли обе другие (минутная и секундная) стрелки;

б) каждый раз, когда часовую стрелку обгоняла только секундная, все стрелки вытягивались вдоль одной прямой линии;

в) часовая стрелка за 1 час сделала 5 оборотов.

Какое минимальное число оборотов за это время могла сделать минутная стрелка, и сколько раз при этом повернулась секундная стрелка?

– Так это же «к первому апреля». Значит, он просто шутник, а вовсе не псих какой-то.

– Ладно, не в этом дело. Решать-то как?

– Что-то мне совсем не нравится эта пятёрка...

– Какая?

– Ну, эти пять оборотов, которые часовая стрелка сделала за час! Почему именно пять? А если шесть или восемь – какая принципиальная разница?

– Думаю, никакой. Если в условии изменить это значение в любое число раз, то и ответы изменятся пропорционально.

– Так давай считать, что часовая стрелка делает один оборот в час. А как найдём ответ – умножим на 5!

– Отлично. Что тогда получается? Все три стрелки стартуют из вертикального положения и через час финишируют там же. Часовая при этом делает один

[1]Автором задачи указан – С. Часовщик. Видимо это один из множества псевдонимов, под которыми любил «прятаться» А. Р. Зильберман.

оборот, минутная – больше (но тоже целое число), секундная – ещё больше (и опять-таки целое).

– Подожди-ка! Упрощать – так упрощать! Если можно уменьшить «масштаб», то можно произвести и «сдвиг»! Давай скорости всех стрелок уменьшим на один оборот в час. Тогда часовая становится вообще неподвижной! На совпадениях стрелок это, конечно, никак не скажется, зато в целом задача явно упрощается.

– Пожалуй. Но после решения надо будет все результаты сначала увеличить на 1, а потом умножить на 5.

– Не проблема! Мы что – считать не умеем? Давай рассмотрим момент, когда секундная стрелка в этих «изменённых» условиях сделала 1 оборот. Тогда минутная стрелка сделала пол-оборота!

– Это почему?

– Смотри в условие: «...когда часовую стрелку обгоняла только секундная, все стрелки вытягивались вдоль одной прямой линии». Вот откуда эта половина!

– Ага! Значит, ещё через оборот секундной все три стрелки совпадут и дальше всё будет повторяться.

– Но нам всё равно нужно выяснить минимальное число оборотов, которое делает минутная стрелка за час.

– Погоди-ка! Ведь это число целое, а давай попробуем самое маленькое, то есть единицу – меньше просто некуда! Вдруг оно подойдёт?

– Хорошая идея. Тогда минутная делает один оборот за час, секундная – два. И всё!

– Но это в «изменённых координатах». Приведём всё к исходным условиям. Сначала добавляем по 1, получая 2 и 3 оборота в час соответственно, и умножаем на 5. В итоге минутная стрелка делает 10 оборотов в час, секундная – 15. Ну-ка, сверим с правильным ответом...

– «Правильным ответом»? Там что, и ответ был?

– Был, конечно, только я его не знаю. Это ведь задача из «Задачника «Кванта»[2] под номером Ф2294. Условие я прочёл, а до решения не добрался. Сейчас на полке поищу... вот оно! Слушай:

Разности угловых скоростей $\omega_с - \omega_ч$ и $\omega_м - \omega_ч$ отличаются ровно в два раза. Кроме того, эти разности угловых скоростей таковы, что $\frac{\omega_м - \omega_ч}{\omega_ч} = N$, где N –

[2] Условие задачи опубликовано в журнале «Квант» № 1 за 2013 год, решение – в № 3 за тот же год (в рубрике «Задачник «Кванта»).

целое положительное число. Минимальное число $N = 1$. Следовательно, $\omega_м = 2\omega_ч$ и $\omega_с = 3\omega_ч$. Таким образом, минутная стрелка за 1 час сделает 10 оборотов, а секундная – 15 оборотов.

– Ты что-нибудь понял?

– Не очень. Хотя ответ совпадает…

– Вот и я как-то не очень.

– Так это же «Задачник «Кванта»! Там всегда задачи наиотборнейшие и наитруднейшие. А мы раскололи её самым элементарным образом. Есть чем гордиться!

– Да, это утешает. Но всё же маловато было мозговой нагрузки. Даже ни одного уравнения не составили.

– По уравнениям соскучился? Вот тебе ещё задача:

В 12:00 расстояние между концами минутной и секундной стрелок правильно идущих часов равнялось 17 мм, а через полчаса – 7 мм. Каково будет это расстояние ещё через 15 минут?

– Что ты несёшь, такого не может быть! В 12:00 направления обеих стрелок совпадают, а через полчаса – стрелки смотрят в разные стороны (причём секундная во все моменты времени сохраняет одно и то же положение). Но тогда расстояние между их концами в первом случае должно быть меньше, чем во втором. По условию же – больше. Противоречие!

– А вот и нет! Обрати внимание: в условии идёт речь о *концах* минутной и секундной стрелок. А теперь подумай и об их *началах*.

– Не понимаю.

– Ладно, ещё ближе к делу: ты видал наручные часы? Так вот, в некоторых из них…

– А, ясно! Бывают часы, у которых ось вращения секундной стрелки находится ниже оси вращения остальных стрелок (как на фото). И сама секундная стрелка совсем коротенькая. Тогда всё нормально. Во все указанные моменты времени конец секундной стрелки занимает одно и то же положение – строго под осью вращения минутной. Если длина минутной стрелки равна x, а расстояние от оси минутной стрелки до конца секундной равно y, то получается система

$$\begin{cases} x+y=17, \\ x-y=7, \end{cases}$$

из которой $x=12$, $y=5$. Ещё через 15 минут расстояние будет равно гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами x и y, то есть 13.

– Вот тебе и уравнения! Доволен?

– Формально да, но... не очень. Бывают ведь и часы, у которых ось вращения не только ниже оси вращения остальных стрелок, но и смещена в сторону (как на фото). Здесь твоих данных уже недостаточно.

– Да... Не предусмотрел. Зато могу показать способ решения этой задачи, если смещения в сторону нет. Его можно назвать *научно-теоретическим*, потому что именно учёные-теоретики первыми сформулировали принцип: «Если факты противоречат теории – тем хуже для фактов». Пусть *все* стрелки всё-таки насажены на одну ось. Тогда возникает противоречие с условием, но давай закроем глаза на то, что $17>7$.

– Не закрываются!

– Ладно, решим задачу в общем виде. Пусть расстояние между концами стрелок в 12:00 равно A, а через полчаса – B. Обозначим длину большей стрелки через x, а меньшей – через y. Тогда получаем:

$$\begin{cases} x-y=A, \\ x+y=B. \end{cases}$$

Если в каждом из этих уравнений возвести обе части в квадрат (раскрыв, как полагается, скобки), а затем эти уравнения сложить, то получим:

$$2(x^2+y^2)=A^2+B^2$$

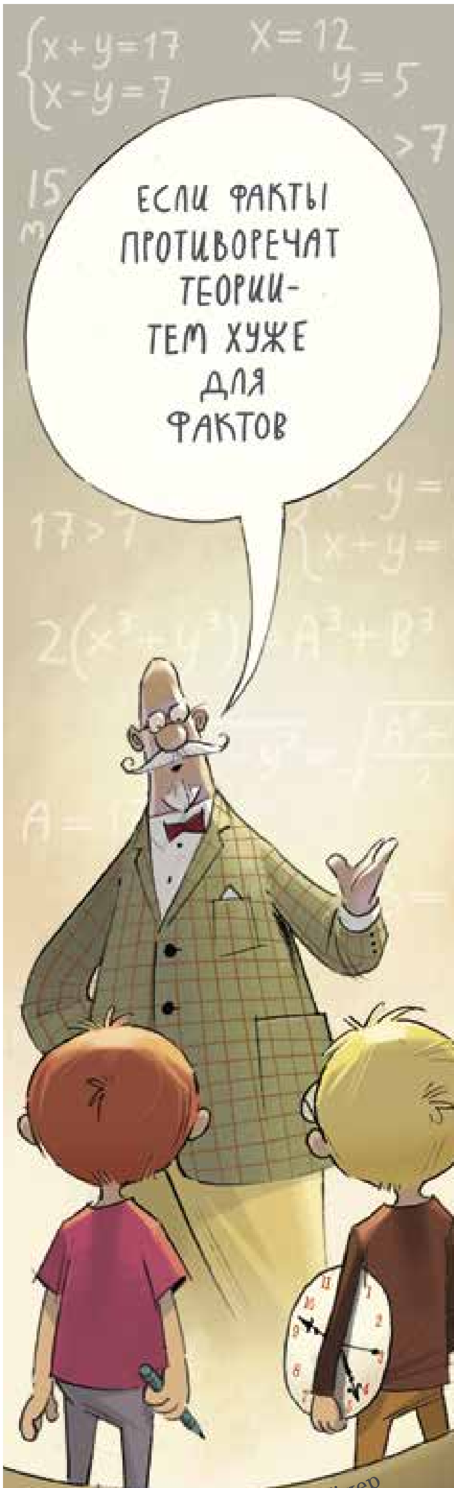
Ещё через 15 минут стрелки расположатся под прямым углом, и расстояние между их концами будет

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}.$$

Подставив сюда $A=17$ и $B=7$ (или наоборот, без разницы!), получаем тот же ответ 13 мм. И не надо ломать голову, каковы длины стрелок и что больше – A или B. Так и надо действовать в трудных случаях, а не рассуждать, какие вылезают противоречия. Согласен?

– Нет.

– Ничего, я это выдержу. Пока!



Художник Алексей Вайнер