ЗНАНИЕ – сила!

Степан Кузнецов

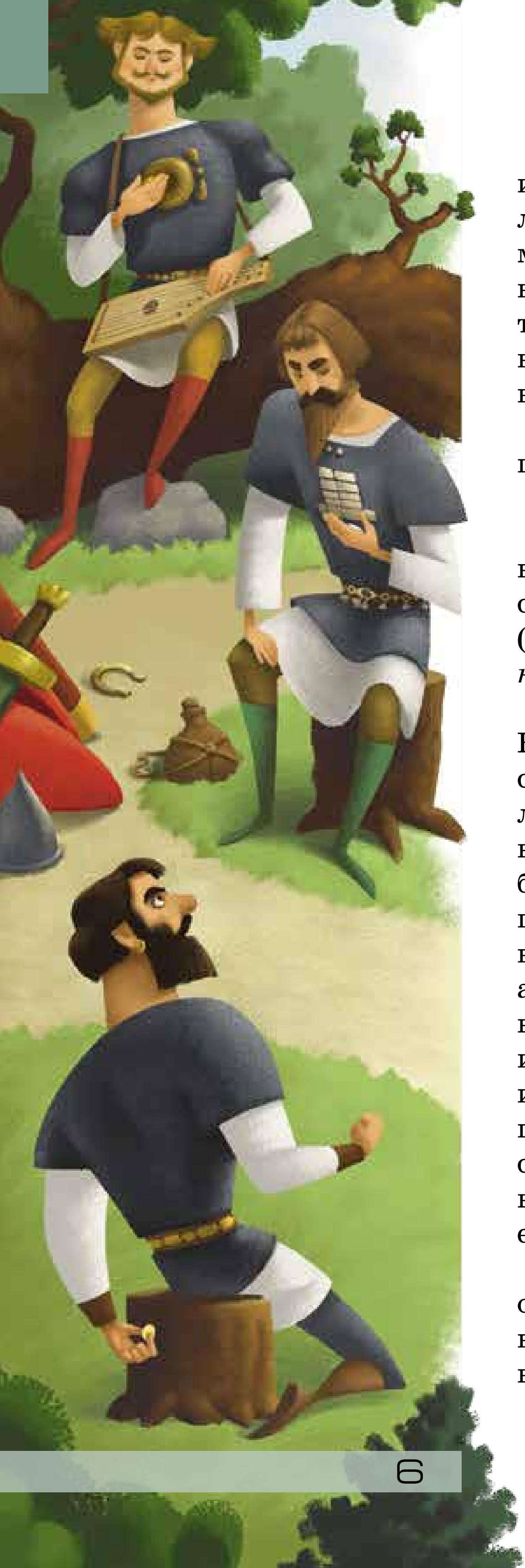
Мы обсудим несколько задач, слегка необычных с математической точки зрения. В них нам будет интересно не только *истинны* ли некоторые высказывания или *ложны*, но также *знают* ли об истинности этих высказываний персонажи, действующие в задаче.

Задача 1. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по 2 монеты. Илья знает всё это и видит свои монеты, но не знает, какие монеты у Добрыни, а какие у Алёши. Надо задать Илье один вопрос, предполагающий ответ «Да» или «Нет», и по ответу выяснить, какие монеты ему достались.

Кажется, что задача неразрешима: вариантов того, какие монеты у Ильи, три (2 золотые, 2 серебряные, золотая и серебряная), а вариантов ответа два: «Да» или «Нет». Но возможен и третий ответ – «Не знаю». Чтобы получить его, надо спрашивать не о монетах Ильи, а о монетах *других* богатырей. Но тогда может показаться, что ответ будет всегда «Не знаю»: ведь в условии сказано, что Илья не знает о монетах Добрыни и Алёши.

Тем не менее, некоторую информацию об этих монетах Илья может *вычислить*, зная лишь свои монеты. Например, если у Ильи две золотые монеты, то он знает, что осталась только одна золотая монета. Значит, ни у Добрыни, ни у Алёши не может оказаться двух золотых монет. Зато заведомо у кого-то из них обе монеты серебряные. Это и приводит нас к решению: нужно задать вопрос «Верно ли, что у кого-то из двух других богатырей обе монеты серебряные?»

Запишем возможные ситуации коротко: буква «З» означает золотую монету, «С» серебряную; сначала монеты Ильи, потом Добрыни, потом Алёши. Например, «ЗЗ; СС; ЗС» означает, что у Ильи 2 золотые монеты, у Добрыни 2 серебряные, а у Алёши – золотая и серебряная. На рисунке 1 возможные ситуации разделены на три группы. В каждой группе ситуации *неразличимы* с точки зрения Ильи Муромца: он-то видит только свои монеты. Кроме того, ситуации расцвечены: зелёным цветом обозначены те, в которых истинный ответ на наш вопрос «Да»; красным – в которых ответ «Нет».



33; 3С; СС   33; СС; 3С

3С; 33; СС   3С; 3С; 3С   3С; СС; 33

СС; 3С; 33   СС; 33; 3С

Рис. 1

Видно, что в средней группе, когда у Ильи золотая и серебряная монеты, есть как «красные», так и «зелёные» ситуации. Значит, Илья даже теоретически не может, опираясь на знания о своих монетах, ответить на вопрос и скажет «Не знаю». В верхней группе обе ситуации «зелёные», и Илья, проведя такое же рассуждение, как и мы сейчас, ответит «Да». В нижней группе, наоборот, обе ситуации «красные», и ответ будет «Нет».

Чтобы наши рассуждения имели силу, нужны два предположения о богатыре, которого мы спрашиваем:

1. Богатырь *честен* (отвечает на вопросы правдиво).

2. Богатырь *умён*, то есть говорит «Не знаю» только в том случае, когда получить ответ, исходя из доступной ему информации, *теоретически невозможно*. (Это условие позволяет Илье Муромцу использовать *косвенное знание* о монетах других богатырей.)

Второе условие не так безобидно, как кажется. Вспомним, например, шахматы и зададимся вопросом: у какого из игроков (играющего чёрными или белыми) есть *стратегия*, позволяющая заведомо, независимо от коварства противника, выиграть или хотя бы свести игру к ничьей? Количество всевозможных шахматных партий хоть и астрономически велико, но не бесконечно. Значит, теоретически возможно проанализировать все возможные партии и дать ответ на этот вопрос (и заодно доказать, что либо у одного – и, разумеется, ровно у одного – из игроков есть выигрывающая стратегия, либо у обоих есть стратегия, приводящая к ничьей). Этот ответ будет логически следовать из правил игры, то есть, по нашему условию, должен быть известен любому, кто правила знает. В реальности же ответ неизвестен никому.

Вот пример поближе к математике: так как все теоремы школьного курса геометрии логически следуют из аксиом, то по нашему условию вышло бы, что выучивший все аксиомы автоматически знает все теоремы. На самом деле всех возможных теорем не знает никто.

Эта трудность обычно называется *проблемой логического всезнания*. Она возникает, когда число возможных ситуаций столь велико, что человек или даже компьютер неспособен их перебрать, или вообще бесконечно. В наших примерах это число невелико, и мы можем смело пользоваться вторым условием.

Перейдём к классической *задаче о чумазых детях*.

Задача 2. Дети вернулись с прогулки, и папа сказал, что у некоторых (хотя бы у одного) из них лица перепачканы. Каждый ребёнок видит лица других детей, а своё не видит. Папа спрашивает, знает ли кто-нибудь из детей, что он сам чумазый. Дети отвечают «Нет». Папа задаёт тот же вопрос ещё раз, потом ещё раз... Поймёт ли кто-то из детей, что он сам чумазый?

Казалось бы, ничего не меняется, и дети всегда будут говорить «Нет». Однако каждый раз ребёнок получает *знание о незнании других*, и эта информация может помочь ему догадаться, чумазый ли он сам.

Чтобы лучше понять происходящее, разберём случай, когда детей всего трое, и двое из них – второй и третий – чумазые, а первый чист. Рассмотрим все потенциально возможные ситуации; будем для краткости обозначать чумазого ребёнка цифрой 1, а чистого – цифрой 0: например, 010 означает, что первый и третий чисты, а второй чумаз.

Возможные случаи удобно изобразить в виде куба (рис. 2). Здесь две ситуации соединены красным отрезком, если они неотличимы с точки зрения первого ребёнка (он не знает, чумаз ли он сам, поэтому не может отличить, например, 001 от 101); зелёные отрезки соответствуют второму, синие – третьему ребёнку. Одной вершины в этом кубе недостаёт: раз сказано, что чумазые есть, случай 000 невозможен.

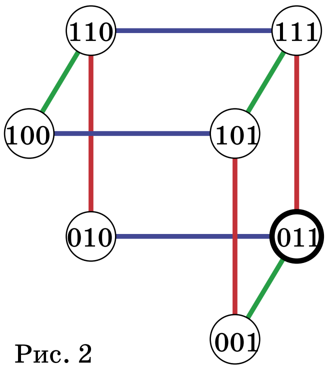


Рис. 2

Посмотрим, что изменится после первого вопроса. В ситуациях, когда чумазый ребёнок ровно один (например, 100), этот ребёнок сразу понимает,

что он чумазый. Значит, если все ответили «Нет», эти ситуации невозможны – и, что нам особенно важно, *об этом теперь знают все дети*! Получаем рисунок 3.

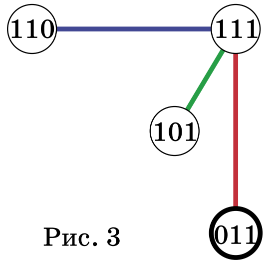


Рис. 3

Теперь «крайними» оказались 110, 101 и 011. Когда папа второй раз задаёт тот же вопрос, в ситуации 011 второй и третий ребёнок уже знают, что они чумазые.

Задача 3. Сможет ли первый ребёнок понять, что он чистый? (Попробуйте сами ответить на этот вопрос.)

Если все дети были чумазыми (случай 111), то потребуется ещё один вопрос: после первого вопроса отсекаются случаи 100, 010 и 001, после второго – 110, 101 и 011, и перед третьим вопросом все дети уже знают, что единственно возможная ситуация – 111.

Так же можно рассуждать и когда детей больше трёх. Если чумазый ровно один, он поймёт это после первого вопроса (он знает, что чумазые есть, но не видит ни одного – значит, чумаз он сам). Если все ответили «Нет», то чумазых хотя бы двое. Если их ровно двое, это выявится после второго вопроса. Иначе все узнают, что чумазых хотя бы трое, и т.д.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4. Король позвал к себе трёх мудрецов и посадил их так, чтобы они видели друг друга, но не себя. После этого он показал им 3 красных и 2 белых колпака и сказал, что наденет на каждого один из этих колпаков. Сделав это (и спрятав оставшиеся два колпака), король спросил по очереди у каждого, знает ли он цвет колпака, который на него надет. Первый и второй ответили «Нет», а третий сказал, что знает. Какого цвета колпак король надел на третьего мудреца?

Задача 5. Каждому из двух математиков сообщили по натуральному числу, причём им известно, что эти числа отличаются на 1. Они поочерёдно спрашивают друг друга: «Известно ли тебе моё число?» Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит «Да». Сколько вопросов они зададут друг другу? (Математики предполагаются правдивыми, бессмертными, и, разумеется, гениальными).

Напоследок разберём ещё одну забавную задачку.

■ **Задача 6.** При дворе короля Правдоруба все издревле говорили только правду и доверяли друг другу. Но однажды король пригласил к себе трёх своих придворных мудрецов и объявил им: «Среди вас хотя бы один – лжец!». Никто из мудрецов не знал про другого, что тот лжец, и они задумались – кто же нарушил древний обычай? Король спросил первого мудреца: «Знаешь ли ты, кто из вас лжец, а кто говорит правду?». Первый мудрец ответил: «Не знаю». Король задал тот же вопрос второму мудрецу. Тот ответил: «Знаю». Наконец, третьего мудреца король спросил: «Сможешь ли ты назвать хотя бы одного лжеца?». На это третий мудрец ответил: «Да, смогу». А кто на самом деле лжец?

В этой задаче, в отличие от предыдущих, нарушено первое условие: участники могут лгать. При этом, как обычно негласно предполагается в задачах «про рыцарей и лжецов», лжец говорит неправду *всегда* (то есть не настолько коварен, чтобы иногда – когда ему выгодно – говорить правдиво). Кроме того, предполагается, что лжецы, если их несколько, не находятся в сговоре: каждый лжец не знает о других лжецах.

Первый мудрец, независимо от того, лжец он или правдивый, не может знать ответа на вопрос короля. Значит, он сказал правду, и поэтому не лжец. Тогда возможны три ситуации: ППЛ, ПЛП, ПЛЛ («П» означает правдивого, «Л» – лжеца; известно, что хотя бы один лжец есть). С точки зрения второго мудреца вторая и третья ситуации неразличимы между собой (и отличимы от первой). В первой ситуации он знает, кто лжец, и правдиво говорит «Знаю». Во второй и третьей ситуациях второй мудрец не знает ответа, но при этом он лжец, и тоже говорит «Знаю». Таким образом, ответ второго мудреца не даёт ни нам, ни третьему мудрецу никакой новой информации. Наконец, с точки зрения третьего мудреца неотличимы ситуации ППЛ и ПЛЛ, но король просит его назвать хотя бы одного лжеца, и он мог бы назвать себя. Значит, сказав «Да, смогу», он сказал правду, что противоречит тому, что он лжец. Значит, имеет место ситуация ПЛП: первый и третий мудрецы говорят правду, второй лжёт.

Задачи из этой заметки относятся к *модальной логике* – мы познакомились с азами этой науки.

Художник Мария Усеинова