



8 и 22 октября 2017 года состоялся осенний тур XXXIX Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант, 8–9 классы

1 (3 балла). Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждой двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько – отрицательны?

Борис Френкин

2 (4 балла). Существуют ли такие 99 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 100, следующее делится на 99, третье делится на 98, ..., последнее делится на 2?

Павел Кожевников

3 (4 балла). В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Рустэм Женодаров

4 (5 баллов). На одной из клеток поля 8×8 зарыт клад. Вы находитесь с металлоискателем в центре одной из угловых клеток этого поля и передвигаетесь, переходя в центры соседних по стороне клеток. Металлоискатель срабатывает, если вы оказались на той клетке, где зарыт клад, или в одной из соседних с ней по стороне клеток. Можно ли гарантированно указать клетку, где зарыт клад, пройдя расстояние не более 26?

Михаил Евдокимов



5 (5 баллов). Окружность радиуса 1 нарисована на шахматной доске так, что целиком содержит внутри белую клетку (сторона клетки равна 1). Докажите, что участки этой окружности, проходящие по белым клеткам, составляют суммарно не более $1/3$ от её длины.

Михаил Евдокимов

Сложный вариант, 8-9 классы

1 (4 балла). Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3:4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравнились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара?

Григорий Гальперин

2 (4 балла). Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой?

Егор Бакаев

3 (6 баллов). Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из трёх ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за июль, на сколько – за август и на сколько – за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть если он предсказывал, что курс увеличится на $x\%$, то курс падал на $x\%$, и наоборот). При этом через три месяца курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

Алексей Заславский





4. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

- а) (1 балл) 99 попыток;
- б) (3 балла) 75 попыток;
- в) (4 балла) 74 попыток?

*Алексей Лебедев,
Александр Шаповалов*



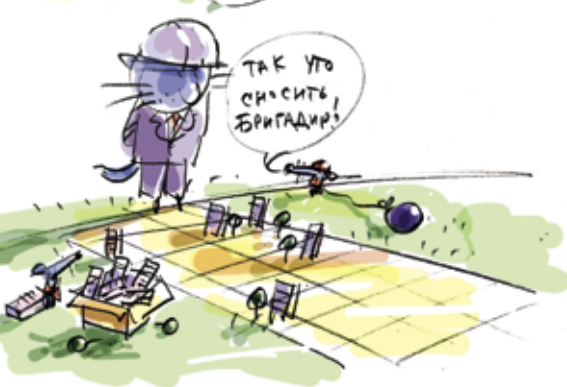
5 (9 баллов). Цифры натурального числа $n > 1$ записали в обратном порядке и результат умножили на n . Могло ли получиться число, записываемое только единицами?

Фёдор Петров



6 (9 баллов). Вписанная окружность касается сторон AB , BC и AC треугольника ABC в точках N , K и M соответственно. Прямые MN и MK пересекают биссектрису внешнего угла B в точках R и S соответственно. Докажите, что прямые RK и SN пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC .

Михаил Евдокимов



7. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседние по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесённом доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры

- а) (5 баллов) 20×20 клеток;
- б) (5 баллов) 50×90 клеток?

Михаил Мурашкин

