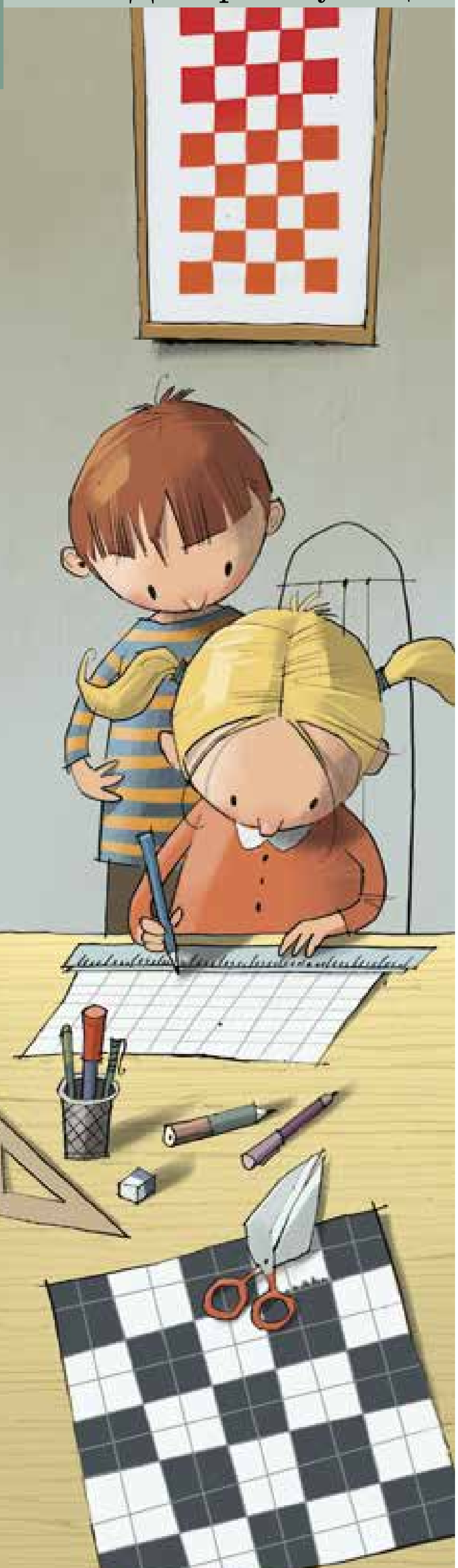
Математический кружок

# О методе раскраски на примере одной задачи

Дмитрий Кузнецов



На математических олимпиадах часто встречаются задачи, решаемые методом раскраски. Ознакомимся с этим методом, продемонстрировав его красоту сразу несколькими решениями одной известной задачи:

**Докажите, что клетчатую доску $10\times10$ нельзя разрезать по линиям сетки на прямоугольники $1\times4$.**

**Решение 1.** Разделим доску на квадраты $2 \times 2$ и раскрасим их в шахматном порядке (рис.1). Заметим, что любой прямоугольник $1\times4$ содержит поровну (по 2) чёрных и белых клеток, а всего на доске 52 чёрные клетки и 48 белых, то есть не поровну. Значит, разрезать доску $10\times10$ на тетрамино $1\times4$ не удастся.

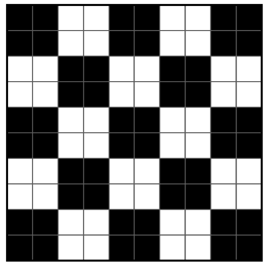


Рис. 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |

Рис. 2

**Решение 2.** Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета (рис.2). Заметим, что любой прямоугольник содержит по одной клетке каждого из четырёх цветов, но на доске по 25 клеток 1-го и 3-го цветов, 26 клеток – 2-го и 24 клетки – 4-го, то есть не поровну. Значит, требуемое разрезание невозможно.

**Решение 3.** Из решения 2 можно получить ещё одно, рассматривая клетки только 4-го цвета. Раскрасим доску диагональной раскраской в два цвета (рис.3). Заметим, что любой прямоугольник содержит одну чёрную клетку, а их на доске – 24. Таким образом, нам удастся вырезать не более 24 тетрамино, а по площади надо 25 штук.

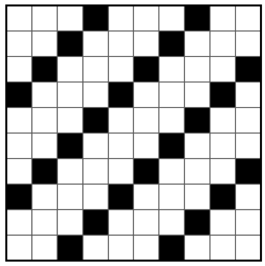


Рис. 3

УПРАЖНЕНИЕ 1. Закрасим клетки, которые на рисунке 2 имели цвета 1 и 2 (рис. 4). Используя рисунок 4, получите четвёртое решение задачи.

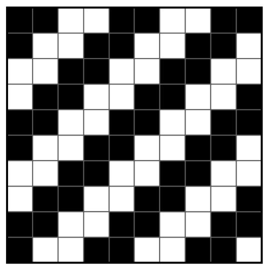


Рис. 4

**Решение 5.** Разделим доску на квадраты $2\times2$ и раскрасим их в 4 цвета одинаковым образом (рис.5). Тогда каждого цвета у нас по 25 клеток (нечётное число), но каждый прямоугольник содержит чётное число (0 или 2) клеток каждого цвета. И, как следствие, во всех вырезанных тетрамино должно быть в сумме по чётному числу клеток каждого цвета, а не 25, и снова доску разрезать нельзя.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |

Рис. 5

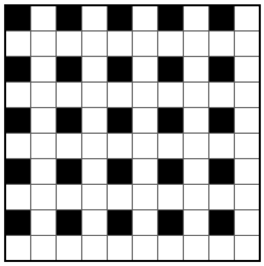


Рис. 6

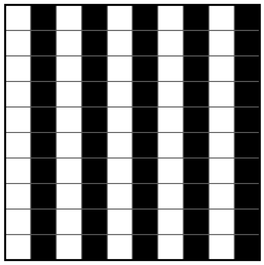


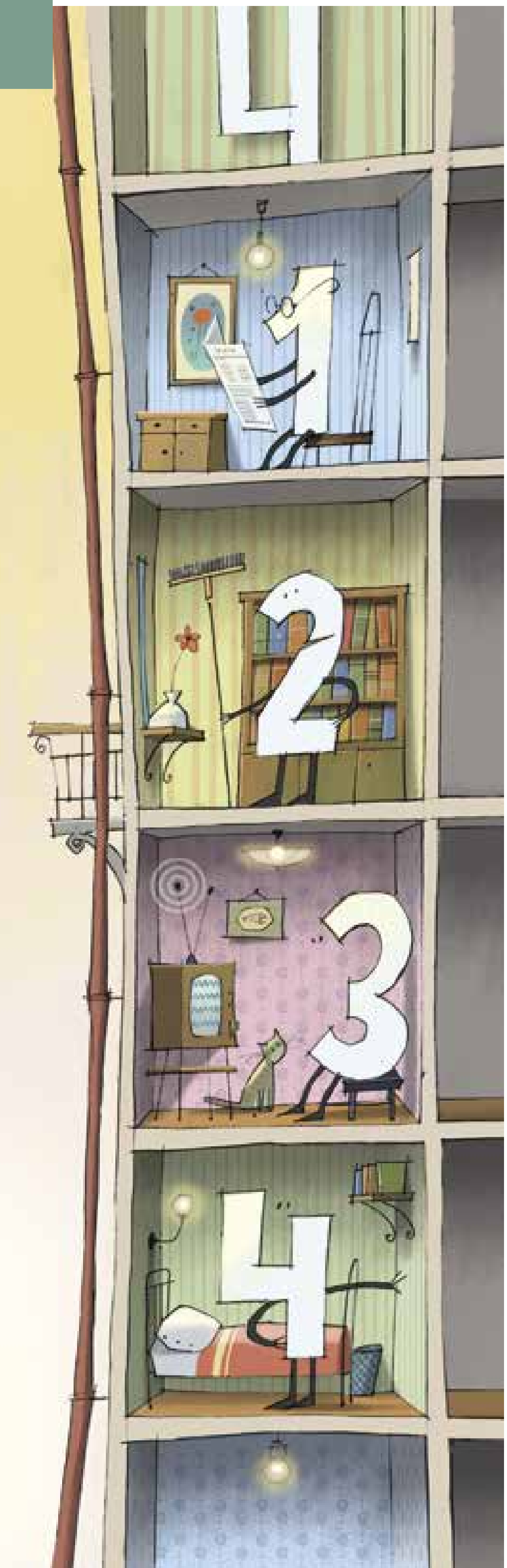
Рис. 7

УПРАЖНЕНИЕ 2. Получите шестое решение задачи, используя решётчатую раскраску рисунка 6; кстати, закрашенные клетки на рисунке 6 – это клетки цвета 1 на рисунке 5.

**Решение 7.** Применим вертикальную полосатую раскраску доски в два цвета (рис.7). Тогда любая вертикальная фигурка содержит кратное 4 (0 или 4) количество чёрных клеток, а любая горизонтальная – 2 чёрные клетки. Так как всего чёрных клеток – 50, что при делении на 4 даёт остаток 2, то общее число горизонтальных прямоугольников нечётно. Рассуждая аналогично для горизонтальной полосатой раскраски, мы докажем, что и вертикальных прямоугольников нечётное число, откуда число всех прямоугольников чётное и не может равняться 25. То есть вывод прежний – разрезать не удастся.

В этом решении в полной мере проявилась специфика полосатой раскраски – разделение фигурок на два направления. Самое интересное заключается в том, что если мы обозначим при вертикальной полосатой раскраске белый и чёрный цвета соответственно через 0 и 1, а при горизонтальной полосатой раскраске – соответственно через 1 и 3, то при наложении этих раскрасок друг на друга и подсчёте суммы чисел в каждой клетке у нас получится не что иное, как раскраска квадратами $2 \times 2$ в четыре цвета с рисунка 5.

**Решение 8**. При вертикальной полосатой раскраске в 4 цвета (рис. 8) вертикальная фигурка содержит кратное 4 (0 или 4) число клеток каждого цвета,



а горизонтальная – по одной клетке каждого цвета. Но каждого цвета на доске либо 20 (кратно 4), либо 30 клеток (остаток 2 при делении на 4), а значит, число горизонтальных фигурок будет одновременно делиться на 4 и давать остаток 2 при делении на 4. Противоречие.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |

Рис. 8

УПРАЖНЕНИЕ 3. Получите девятое решение, используя вертикальную раскраску рисунка 9 и аналогичную горизонтальную раскраску.

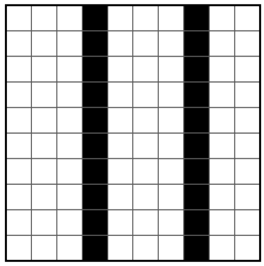


Рис. 9

УПРАЖНЕНИЕ 4. Получите десятое решение, используя раскраску рисунка 10 (это наложение вертикальной и горизонтальной раскрасок из решения 9 по принципу «чёрный цвет – перекрашивание клетки в противоположный цвет»).

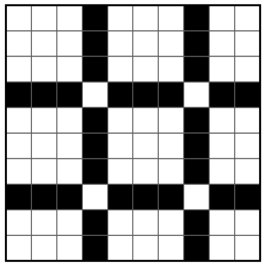


Рис. 10

**Решение 11.** Если вертикальную и горизонтальную раскраски с рисунка 9 наложить друг на друга и для красоты поменять цвета местами, то получится следующая решётчатая раскраска (рис.11). Тогда любой прямоугольник накрывает кратное 3 (0 или 3) количество чёрных клеток, а их на доске не кратное 3 количество (64). Делаем вывод, что все чёрные клетки принадлежать прямоугольникам не могут, и разрезать доску нельзя.

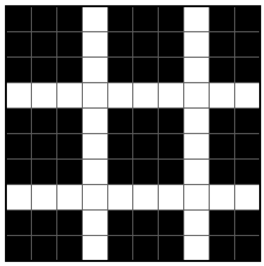


Рис. 11

УПРАЖНЕНИЕ 5. Получите двенадцатое решение задачи, используя раскраску в 4 цвета на рисунке 12.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |

Рис. 12

Оказывается, исходная задача – частный случай более общей:

**Прямоугольную доску можно разрезать на одинаковые клетчатые полоски $1 \times N$ в том и только в том случае, когда длина хоть одной из сторон доски делится на $N$.**

Иными словами, если хоть какой-то способ разрезания есть, то обязательно есть и «тривиальный» способ – когда все полоски расположены «одинаково» (все вертикально, либо все горизонтально).

Решить эту задачу непросто, но и тут поможет метод раскраски. Попробуйте! (Для начала докажите, что доску $15\times20$ нельзя разрезать на фигурки $1\times6$.)

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА «МЕТОД РАСКРАСКИ».

**1.** Можно ли шахматным конём обойти все клетки доски $5\times5$, побывав на каждой клетке по одному разу и вернуться последним ходом в исходное положение?

**2.** Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Съедая какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

**3.** На каждой клетке-треугольничке треугольной доски со стороной 5 сидит жук. В некий момент все жуки взлетают и приземляются на соседние (по стороне) клетки этой доски. Докажите, что найдутся по крайней мере 5 пустых клеток.

**4.** На каждой клетке доски $9\times9$ сидело по жуку. По сигналу каждый жук переполз на одну из соседних клеток а) по стороне; б) по диагонали. Найдите наименьшее возможное число клеток, которые станут пустыми.

**5.** На шахматной доске стоят несколько королей. Докажите, что их можно разбить не более чем на четыре группы так, чтобы короли каждой группы друг друга не били.

**6.** В левом нижнем углу доски $8\times8$ стоят 8 шашек, образуя квадрат $3\times3$. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтобы они образовали квадрат $3\times3$: а) в левом верхнем углу; б) в правом верхнем углу?

**7.** Какими видами тетрамино (фигурки из 4 клеток) можно покрыть доску размером $10\times10$?

**8.** Прямоугольное дно коробки было выложено квадратами $2\times2$ и прямоугольниками $1\times4$. Один квадрат потеряли и вместо него нашли прямоугольник. Возможно ли, что и теперь удастся сложить дно прямоугольной коробки?

**9.** Можно ли три попарно соседние грани кубика $4\times4\times4$ оклеить 16 полосками $3\times1$?

Художник Алексей Вайнер